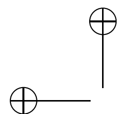
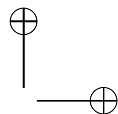
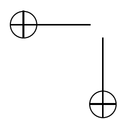
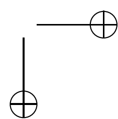


Análisis de sistemas dinámicos lineales

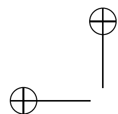
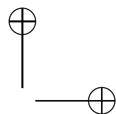
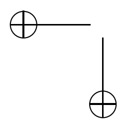
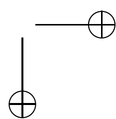
Análisis de sistemas dinámicos lineales

Oscar G. Duarte V.

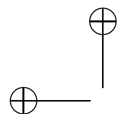
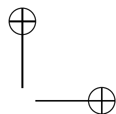
Profesor asociado del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

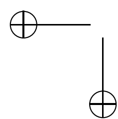
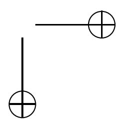


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

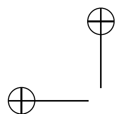
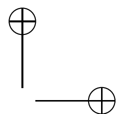
A quienes trabajan por la
democratización del conocimiento

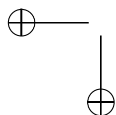
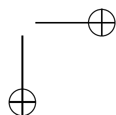



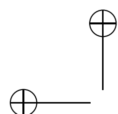
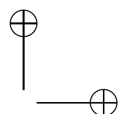
Contenido

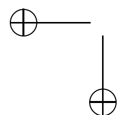
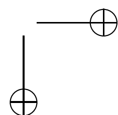
Lista de figuras

Lista de tablas

Prefacio

Este texto de *Análisis de sistemas dinámicos* se ha preparado como material de apoyo para el curso de igual nombre impartido en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia. Existe una versión electrónica en la página del proyecto Universidad Virtual de la misma universidad (`http://virtual.unal.edu.co`) que está acompañada de aplicaciones de software, enlaces y documentación útiles para la aprehensión de los conceptos aquí presentados.

Se ha supuesto un lector con conocimentos mínimos de ecuaciones diferenciales y cuyo interés en el tema esté cercano al control de sistemas dinámicos. En general, es adecuado como guía para cursos de pregrado en ingeniería, aunque el apéndice D tiene un nivel más avanzado.

El cuerpo principal del texto se organiza así: el capítulo 1 delimita el tipo de sistemas que se estudiarán en el texto y presenta las ideas básicas sobre cómo obtener las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento. Esta tarea (la obtención de las ecuaciones) es fundamental para el análisis y control de sistemas, y amerita un estudio mucho más profundo que el destinado en este capítulo introductorio; en los restantes capítulos se asume que ya se cuenta con las ecuaciones de los sistemas a estudiar.

Los fundamentos matemáticos para solucionar dichas ecuaciones se resumen en el capítulo 2; especial énfasis se hace en los métodos de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$. Las herramientas más usuales de análisis de sistemas se presentan en el capítulo 3 y el capítulo 4 se dedica al estudio de los sistemas de primer y segundo orden, que resultan ser fundamentales pues presentan los comportamientos básicos que pueden aparecer en cualquier sistema dinámico.

La realimentación, estrategia fundamental del control de sistemas dinámicos, se explora en el capítulo 5. Un enfoque diferente al análisis de sistemas, el espacio de estado, se aborda en el capítulo 6. Finalmente, el capítulo 7 presenta algunos comportamientos que pueden aparecen en los sistemas no lineales, y que no pueden existir en los sistemas lineales.

Adicionalmente, se han incluido cuatro apéndices: el apéndice A contiene las demostraciones de las propiedades y parejas de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ que se enuncian en el capítulo 2 y se emplean a lo largo del texto. Los apéndices B y C están dedicados a los diagramas de Bode y a la carta de Nichols, respectivamente. El apéndice D es una presentación rigurosa de los conceptos de álgebra lineal que se enuncian en el capítulo 6.

Este texto no habría sido posible sin la colaboración directa e indirecta de muchas personas. Quiero agradecer en primer lugar a los alumnos de los cursos de pregrado y posgrado de análisis de sistemas dinámicos cuyas observaciones y sugerencias han sido extremadamente valiosas; ellos han sido además la principal motivación de este trabajo; a los profesores Hernando Díaz y Estrella Parra por sus aportes y permanente estímulo. Agradezco tambien a la Universidad Nacional de Colombia por su apoyo en la publicación del texto; a la comunidad de desarrolladores y usuarios del programa LaTeX sin cuyo aporte éste y muchos libros serían quimeras; a Alfredo Duplat Ayala por sus comentarios en el campo editorial; por último, pero no menos importante, a Tatiana y Laura por su cariño y paciencia y a Lucía, futuro e ilusiones.

Oscar G. Duarte

Capítulo 1

Introducción al modelamiento de sistemas

1.1. Conceptos preliminares

Iniciamos el estudio del análisis de sistemas dinámicos lineales con la presentación de los siguientes conceptos básicos:

1.1.1. Sistemas

No es fácil encontrar una definición exacta de *sistema*, quizás porque el término es utilizado en muy diversos contextos. En un sentido amplio, podemos entender por sistema *aquello que se va a estudiar*. Tal definición es extremadamente vaga pero pone de manifiesto la necesidad de delimitar el objeto de estudio, de imponerle unas fronteras precisas. Dividimos el universo en dos partes: el sistema y todo lo demás; esto último lo denominamos el Entorno del Sistema.

Podemos imaginar sistemas de tipos muy diferentes de acuerdo con qué es lo que se va a estudiar; si se desea conocer cómo se nutre un determinado animal estaríamos definiendo un sistema biológico, mientras que si lo que se quiere es conocer la variación de la población en una determinada ciudad a través de los años definiríamos un sistema sociológico. Pueden plantearse también sistemas abstractos, como por ejemplo el conjunto de los números enteros o las estrategias de comunicación lingüísticas.

El propósito de este curso no es, por supuesto, abordar cualquier tipo de sistema, sino que se limita al estudio de un tipo específico de sistemas que suelen denominarse en el contexto de la física, la matemática y la ingeniería *Sistemas*

Dinámicos Lineales. Para precisar qué tipo de sistemas son éstos requerimos primero de la presentación de los conceptos de *señales* y *modelos*.

1.1.2. Señales

Las señales son el medio a través del cual el sistema interactúa con su entorno. En la figura 1.1 se visualiza esta interacción: el sistema está representado por un rectángulo, lo que da a entender que tiene sus fronteras definidas en forma precisa; este sistema recibe del entorno unas *señales de entrada*, representadas por flechas, y entrega a su entorno unas *señales de salida*, también representadas por flechas.

En las aplicaciones típicas de ingeniería, las señales de entrada y salida son variables (físicas o abstractas) que cambian en el tiempo, como por ejemplo, fuerzas, velocidades, temperaturas, etc.



FIGURA 1.1: Sistema y señales

Cuando un sistema recibe una única señal de entrada y produce una única señal de salida, se dice que es un sistema SISO (del inglés *Single Input Single Output*), mientras que si recibe varias entradas y produce varias salidas, se dice que es un sistema MIMO (del inglés *Multiple Input Multiple Output*). También existen las denominaciones MISO para sistemas de varias entradas y una sola salida, y SIMO para el caso con una entrada y varias salidas, este útlimo poco frecuente.

1.1.3. Modelos

Para entender un sistema debemos hacer una representación abstracta de él; tal representación es el *modelo* del sistema. La figura 1.2 visualiza la diferencia que existe entre sistema y modelo. El sistema existe, y de él hacemos una o varias abstracciones para poder comprenderlo. Las representaciones abstractas pueden ser de muchos tipos (ecuaciones, gráficas, etc.) algunos de los cuales son:

Modelos mentales: son representaciones presentes en nuestro cerebro; tenemos, por ejemplo, una representación mental de nuestro cuerpo que nos permite controlarlo para caminar, saltar, etc.

Modelos lingüísticos: son representaciones con palabras; este párrafo, por ejemplo, intenta explicar con palabras qué es el sistema denominado *modelo lingüístico*.

Modelos gráficos: en ocasiones empleamos tablas y/o gráficas como modelos; los catálogos de productos de ingeniería suelen contener muchos ejemplos de este tipo de modelo.

Modelos matemáticos: estos modelos son ampliamente usados en áreas como la física, la ingeniería, la economía, etc.; generalmente se trata de ecuaciones que muestran las relaciones existentes entre las variables que afectan un sistema.

Modelos de software: en ocasiones es posible desarrollar programas de computador que representen sistemas complejos.

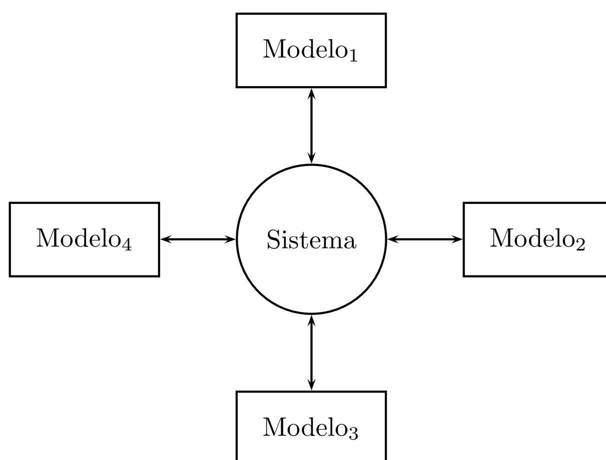


FIGURA 1.2: Sistemas y modelos

Es importante destacar que un mismo sistema puede ser representado por muchos modelos diferentes. Este hecho plantea el interrogante ¿cuál es el *mejor* modelo de un sistema dado?

No es sensato aspirar a obtener un modelo *perfecto* de un sistema real, porque existirán siempre fenómenos que se escapen a nuestra capacidad de abstracción, por lo tanto, la respuesta debe darse en términos de la utilización del modelo; el mejor modelo es aquel que sea *útil* para nuestros propósitos particulares, y dentro de todos los modelos útiles, preferiremos el más sencillo. La utilidad del modelo también determinará el grado de sofisticación que se requiera.

1.1.4. Construcción de los modelos matemáticos

En general, la construcción de modelos se basa en la observación del sistema. Existen algunos caminos básicos para obtener un modelo (ver figura 1.3):

Modelamiento de sistemas: esta estrategia consiste en descomponer (abstractamente) el sistema en subsistemas más simples, cuyos modelos sean factibles de obtener gracias a la experiencia previa. Una vez obtenidos estos submodelos, se buscan las relaciones que existen entre ellos, para interconectarlos y obtener el modelo del sistema original.

Esta estrategia busca una descripción desde adentro del sistema, generalmente basada en el conocimiento de las leyes que rigen los sistemas simples. El modelo así obtenido se conoce como *modelo de caja blanca* o *modelo interno*.

Identificación de Sistemas: esta estrategia consiste en acumular un número suficiente de observaciones sobre las señales de entrada y salida del sistema, con el propósito de emplearlas para construir un modelo del mismo. No se centra en lo que existe en el interior del sistema, sino en su comportamiento respecto al entorno. El modelo así obtenido se conoce como *modelo de caja negra* o *modelo entrada - salida*.

Estrategia híbrida: existe una tercera estrategia, que realmente es una combinación de las anteriores: al igual que en la estrategia de modelamiento, se emplea el conocimiento que esté a la mano acerca de la estructura interna del sistema y las leyes que rigen su comportamiento, y se emplean observaciones para determinar la información que haga falta. El modelo así obtenido se conoce como *modelo de caja gris*.

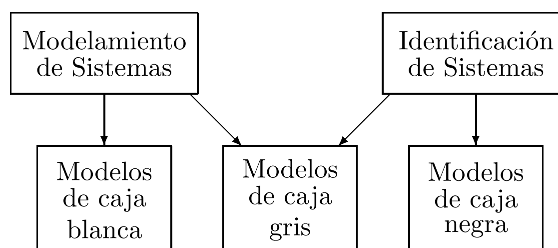


FIGURA 1.3: Construcción de modelos

1.1.5. Clasificación de los modelos matemáticos

En el ámbito de este texto se emplearán modelos de tipo matemático, es decir, nuestros modelos serán ecuaciones y el análisis de los sistemas así modelados estará ligado a la solución de dichas ecuaciones. Las siguientes definiciones ayudarán a puntualizar qué tipo de modelos matemáticos son los que se pretenden estudiar, según se observa en la figura 1.4.

Modelos causales y no causales: el estado de un sistema causal depende sólo de las condiciones presentes y pasadas, pero no de las futuras, es

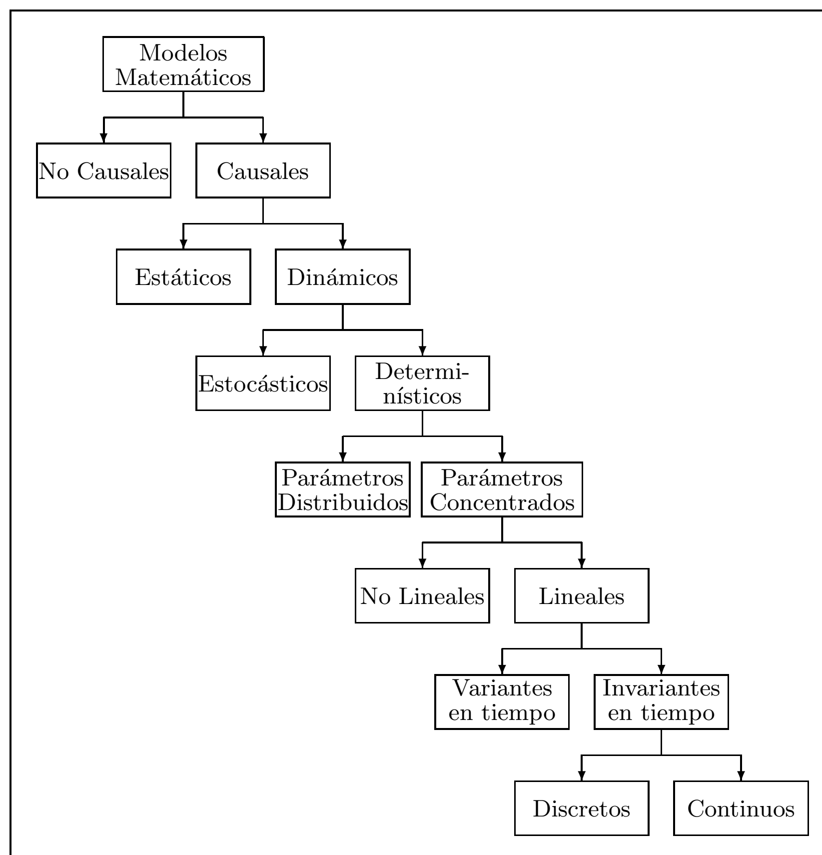


FIGURA 1.4: Clasificación de los modelos matemáticos de sistemas

decir hay una relación de causalidad. Los sistemas físicos son causales, pero se pueden concebir modelos de ciertos sistemas que no lo sean. En el texto se estudiarán sólo sistemas causales.

Modelos estáticos y dinámicos: el estado de un sistema estático depende sólo de las condiciones presentes y no de las pasadas. En contraposición, el estado de un sistema dinámico depende de lo que haya sucedido en el pasado, generalmente debido a que en el sistema hay algún tipo de almacenamiento de energía. Los sistemas dinámicos también se conocen como sistemas con memoria. Los modelos de sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales o de diferencia. En el texto se estudiarán sólo sistemas dinámicos.

Modelos estocásticos y determinísticos: en ocasiones se sabe que existen variables que afectan el sistema, pero no es posible predecir el valor que éstas puedan tomar; una de las alternativas para hacer frente a estos casos consiste en considerar que esa variable es aleatoria y buscar técnicas basadas en la teoría de probabilidades para analizar el sistema. Un modelo que incluya variables aleatorias es un modelo estocástico, mientras que modelos exentos de aleatoridad se denominan modelos determinísticos. Estos últimos serán los que se estudien en este texto.

Modelos de parámetros concentrados y distribuidos: la mayoría de los fenómenos físicos ocurren en una región del espacio, pero en muchas ocasiones es posible representar ese fenómeno como algo puntual; por ejemplo, para estudiar la atracción entre el sol y la tierra es posible representar toda la masa de cada uno de esos cuerpos concentrada en un único punto (su centro de gravedad).

Sin embargo, otros fenómenos como la transmisión de ondas electromagnéticas o las olas en el mar requieren una representación que considere qué está sucediendo en cada punto del espacio, en este caso se necesita un modelo de parámetros distribuidos en el espacio, en contraposición a los modelos de parámetros concentrados. Los modelos de parámetros distribuidos implican ecuaciones diferenciales con derivadas parciales y no serán estudiados en este texto; por su parte los modelos de parámetros concentrados, requieren ecuaciones con derivadas o ecuaciones de diferencia ordinarias.

Modelos lineales y no lineales: la linealidad es una propiedad que pueden tener o no las funciones; realmente se trata de dos propiedades agrupadas bajo un mismo nombre. Dada una función $y = f(x)$ estas propiedades son:

1. Proporcionalidad: es igual calcular la función en un argumento amplificado por un factor α que calcularla sobre el argumento y luego amplificar el resultado por ese mismo factor:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales al duplicar las entradas se duplican las salidas.

2. Superposición: es igual calcular la función en la suma de dos argumentos que calcularla por separado en cada uno de los argumentos y sumar los resultados.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales de varias entradas, las salidas pueden conocerse calculando por separado el efecto de cada entrada y sumando los resultados.

En este texto se estudiarán los modelos lineales, y tan sólo en el capítulo 7 se mencionarán algunos comportamientos especiales que pueden ocurrir en los sistemas no lineales.

Modelos variantes e invariantes en el tiempo: un modelo se dice invariante en el tiempo cuando las propiedades del sistema modelado se consideran constantes en el tiempo. En caso contrario se dice variante en el tiempo. Nótese que la variación se refiere a las propiedades (parámetros) del sistema, no de las señales que le afectan (variables). En la mayor parte de este curso se considerarán sistemas invariantes en el tiempo.

Modelos continuos y discretos: para describir el comportamiento de sistemas dinámicos es posible definir la variable *tiempo* en dos formas distintas:

Tiempo continuo: se considera que el tiempo t es una variable continua que puede tomar cualquier valor real, aunque generalmente se restringe a los valores positivos ($t \in \mathbb{R}^+$). Las variables resultan ser descritas por funciones que van de los reales positivos a los reales ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$).

Tiempo discreto: se considera que el tiempo k es una variable discreta, es decir, que sólo toma valores en ciertos puntos de la recta real. Usualmente estos instantes están espaciados de forma regular en un intervalo T. En este texto se considera además $T = 1$, en unidades de tiempo adecuadas, que pueden ser años, días, microsegundos, etc. De esta forma k es una variable entera, generalmente positiva ($k \in \mathbb{Z}^+$). Las variables resultan ser descritas por funciones que van de los enteros positivos a los reales ($f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$), es decir, son sucesiones.

En este texto se considerarán ambos tipos de modelos, pero en forma independiente, es decir, no se considerarán sistemas híbridos que tengan una parte descrita en forma continua y otra en forma discreta. Estos sistemas son de amplio interés en las aplicaciones de *control digital* y en *tratamiento digital de señales* (particularmente el efecto del periodo T del tiempo discreto resulta ser importante), pero no son tratados en este texto.

1.1.6. Modelos matemáticos a utilizar

De acuerdo con lo presentado en la sección 1.1.5, y resumido en la figura 1.4, en este curso se emplearán modelos matemáticos causales, dinámicos, determinísticos, de parámetros concentrados, lineales, invariantes en el tiempo, para dos casos diferentes: tiempo continuo y tiempo discreto.

Para un sistema continuo de una única entrada y una única salida, como el de la figura 1.5, el modelo empleado corresponde a una *ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes*:

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)= b_m\frac{d^mu}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u(t)\quad n\geq m \tag{1.1}$$

Por su parte, un sistema discreto de una única entrada y una única salida, como el de la figura 1.6, tendrá por modelo una *ecuación de diferencias finitas ordinaria de coeficientes constantes*:

$$a_ny(k+n)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)= b_mu(k+m)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)\quad n\geq m \tag{1.2}$$



FIGURA 1.5: Sistema dinámico continuo



FIGURA 1.6: Sistema dinámico discreto

La condición $n\geq m$ de las ecuaciones (1.1) y (1.2) asegura modelos causales. En efecto, podemos suponer una ecuación de diferencias que viole esta condición, por ejemplo $y(k)=u(k+1)$; es obvio que para cualquier k la salida del sistema depende de una condición futura de la entrada, (por ejemplo para $k=0$ se tiene $y(0)=u(1)$), lo que viola la condición de causalidad.

Otro tipo de ecuaciones diferenciales que se emplearán relacionan vectores de variables mediante matrices. Para el caso continuo se muestra un ejemplo en (1.3) y para el caso discreto en (1.4)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

1.2. Sistemas físicos

Los modelos matemáticos de las ecuaciones (1.1) y (1.2) pueden ser útiles para representar el comportamiento de diversos tipos de sistemas en áreas de la física, ingeniería, biología, economía, sociología, etc. Por lo tanto las técnicas de análisis que se explicarán en este texto son de amplia aplicabilidad. No obstante, centramos aquí nuestra atención en los fundamentos necesarios para obtener modelos continuos de cierto tipo de sistemas frecuentes en la ingeniería.

La tabla 1.2 resume las Variables y Parámetros de algunos de estos sistemas. Para cada caso se han identificado dos variables que permiten analizar algunos fenómenos; estas variables se han identificado como *Esfuerzo* E y *Flujo* F, y pueden interpretarse como las variables que causan un fenómeno y la forma en que este fenómeno se manifiesta; dicha interpretación, sin embargo, es arbitraria y corresponde tan sólo a la metáfora que se haya empleado para entender el fenómeno físico. Para resaltar este hecho, en la tabla 1.2 se presentan los sistemas eléctricos con dos posibles interpretaciones.

De todos los posibles fenómenos físicos existentes, en la tabla 1.2 se presentan aquellos que tienen un modelo matemático que corresponde a uno de los siguientes casos:

Resistencia: el Esfuerzo es directamente proporcional al Flujo, resultando en una ecuación de la forma $E = \mathcal{R}F$.

Inductancia: el Esfuerzo es directamente proporcional a la variación del Flujo, resultando en una ecuación de la forma $E = \mathcal{L}\frac{dF}{dt}$.

Capacitancia: el Esfuerzo es directamente proporcional a la acumulación del Flujo, resultando en una ecuación de la forma $E = \mathcal{C}\int F dt$.

Nótese que las variables de Esfuerzo y Flujo que aparecen en la tabla 1.2 han sido seleccionadas tomando como único criterio el que permitan escribir los modelos matemáticos de ciertos fenómenos físicos de acuerdo con alguno de los tres casos anteriores; podrían seleccionarse otras variables para describir otros fenómenos.

Dado que las descripciones matemáticas de estos fenómenos son semejantes, es posible establecer analogías entre los tipos de sistemas que dependerán de las variables seleccionadas como Esfuerzo y Flujo; por ejemplo, será posible establecer una analogía entre los resortes lineales de los sistemas traslacionales y las inductancias de los sistemas eléctricos (columnas 2 y 4 tabla 1.2), pero también puede establecerse una analogía entre el mismo tipo de resorte y las capacitancias de los sitemas eléctricos (columnas 3 y 4 tabla 1.2).

	Eléctrico A	Eléctrico B	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Hidraúlico (Tanques)	Térmico
Esfuerzo E	Corriente i	Tensión e	Fuerza f	Torque τ	Caudal q	Diferencia de temperatura $\Delta\theta$
Flujo F	Tensión e	Corriente i	Velocidad v	Velocidad angular ω	Nivel de líquido h	Flujo de calor q_c
Resistencia $E = \mathcal{R}F$	Conductancia $i = Ge$	Resistencia $e = Ri$	Amortiguamiento viscoso $f = Bv$	Amortiguamiento viscoso rotacional $\tau = B\omega$	Resistencia Hidráulica $q = R_H h$	Resistencia térmica $\Delta\theta = R_T q_c$
Inductancia $E = \mathcal{L}\frac{dF}{dt}$	Capacitancia $i = C\frac{de}{dt}$	Inductancia $e = L\frac{di}{dt}$	Masa de inercia $f = M\frac{dv}{dt}$	Momento de inercia $\tau = J\frac{d\omega}{dt}$	Área de tanque $q = A\frac{dh}{dt}$	
Capacitancia $E = \mathcal{C}\int Fdt$	Inductancia $i = \frac{1}{L}\int edt$	Capacitancia $e = \frac{1}{C}\int idt$	Resorte $f = K\int vdt$	Resorte torsional $\tau = K_T\int \omega dt$		Capacitancia térmica $\Delta\theta = C_T\int q_c dt$

Tabla 1.2: Variables y parámetros de sistemas físicos

1.3. Grafos de enlaces de potencia. *Bond Graphs*

La construcción de modelos matemáticos a partir de las relaciones de la tabla 1.2 puede ser una tarea complicada para sistemas complejos en los que existan combinaciones de sistemas de diferente tipo. Una de las estrategias que facilita la construcción de tales modelos se denomina técnica de los *Bond Graphs*.

Los *Bond Graphs* son grafos basados en las relaciones de potencia que existen en los sistemas físicos, y por esa razón los llamaremos "grafos de enlaces de potencia", aunque ésta no es una traducción literal, ni es ampliamente empleada.

La representación de las relaciones de potencia se hace en función de una pareja de variables, Esfuerzo $e(t)$ y Flujo $f(t)$ que se seleccionan adecuadamente según el tipo de sistema a modelar, de tal manera que la potencia $p(t)$ se calcule como:

$$p(t) = e(t)f(t) \tag{1.5}$$

Las variables empleadas se relacionan en la tabla 1.4[1]. Adicionalmente, se consideran las integrales respecto al tiempo del Esfuerzo y el Flujo, P y Q respectivamente. En los ejemplos de este capítulo se considerarán únicamente ejemplos de sistemas eléctricos y mecánicos.

1.3.1. Elementos básicos

Los siguientes son los elementos básicos de un grafo de enlaces de potencia:

Elementos de 1 puerto: estos elementos representan sistemas en donde sólo interviene una variable de Esfuerzo y una variable de Flujo. La figura 1.7 muestra los distintos elementos de un puerto, su símbolo y la relación existente entre las variables de Esfuerzo y Flujo. Los tres primeros elementos, R, C, I, son elementos *pasivos*, ya que no contienen fuentes de energía, mientras que los dos últimos, S_e y S_f, son elementos activos que suministran energía (son fuentes de Esfuerzo y Flujo respectivamente).

Elementos de 2 puertos: estos elementos son conversores de potencia, es decir, reciben potencia, la transforman y la entregan sin pérdida alguna. Por uno de los puertos reciben potencia y por el otro la entregan; en cada puerto hay una variable de Esfuerzo y una de Flujo. La figura 1.8 muestra los dos tipos de elementos de dos puertos que existen, sus símbolos y las relaciones matemáticas que los rigen.

Elementos multipuerto (Uniones): estos elementos representan la ley de continuidad de potencia, y sirven para describir las relaciones topológicas

[1] Nótese que no necesariamente son las mismas variables Esfuerzo y Flujo relacionadas en la tabla 1.2, aunque algunas coinciden.

Sistema	Esfuerzo	e	Flujo	f
Eléctrico	Tensión eléctrica	v	Corriente eléctrica	i
Mecánico traslacional	Fuerza	F	Velocidad	ν
Mecánico rotacional	Torque	τ	Velocidad angular	ω
Hidraúlico	Presión	P	Variación de flujo volumétrico	dQ/dt
Térmico A	Temperatura	T	Variación de diferencia de entropía	ds/dt
Térmico B	Presión	P	Variación de cambio de volumen	dV/dt
Químico A	Potencial químico	m	Variación de flujo molar	dN/dt
Químico B	Entalpía	h	Variación de flujo másico	dm/dt
Magnético	Fuerza magnetomotriz	e_m	Flujo magnético	Φ

Tabla 1.4: Variables físicas empleadas en los grafos de enlaces de potencia

del sistema y así relacionar elementos de uno o dos puertos entre sí. La figura 1.9 muestra los dos tipos de uniones existentes, sus símbolos y las relaciones matemáticas que los rigen.

Ejemplo 1.1 La figura 1.10 muestra el diagrama de un elevador, compuesto por un motor eléctrico, un eje, una polea, un cable y un vagón. En el motor hay un circuito eléctrico que incluye una resistencia, una inductancia y la tensión contraelectromotriz; el eje se considera rígido, sin masa y con fricción viscosa; la polea tiene un momento de inercia; el cable es elástico y el vagón está directamente acoplado al cable.

La figura 1.11 muestra el sistema en forma esquemática, resaltando la existencia de diferentes dominios de energía: eléctrico, rotacional y traslacional. La figura 1.12 muestra el grafo de enlaces de potencia del sistema completo: en la primera unión se representa el circuito eléctrico en serie (unión tipo 1 porque el flujo es común); el rotador representa la conversión de energía eléctrica en rotacional; la siguiente unión representa el comportamiento de la polea; el transformador muestra el cambio del dominio de energía rotacional al traslacional; y la última unión representa los fenómenos mecánicos en el vagón, incluida la atracción de la gravedad. En este grafo se han numerado todos los enlaces, para facilitar su identificación.

Tipo de Elemento	Símbolo	Relaciones
Elemento R	$\overset{e}{\underset{f}{\rightharpoonup}} R$	$e = Rf$ $f = \frac{e}{R}$
Elemento C	$\overset{e}{\underset{f}{\rightharpoonup}} C$	$e = C\int f\,dt$ $f = \frac{1}{C}\frac{de}{dt}$
Elemento I	$\overset{e}{\underset{f}{\rightharpoonup}} I$	$e = I\frac{df}{dt}$ $f = \frac{1}{I}\int edt$
Fuente de Esfuerzo	$S_e \overset{e}{\underset{f}{\rightharpoonup}}$	$e = S_e$
Fuente de Flujo	$S_f \overset{e}{\underset{f}{\rightharpoonup}}$	$f = S_f$

FIGURA 1.7: Elementos de un puerto para grafos de enlaces de potencia

Tipo de Elemento	Símbolo	Relaciones
Transformador	$\overset{e_1}{\underset{f_1}{\rightharpoonup}} TF:k \overset{e_2}{\underset{f_2}{\rightharpoonup}}$	$e_1 = ke_2$ $f_1 = \frac{f_2}{k}$
Rotador	$\overset{e_1}{\underset{f_1}{\rightharpoonup}} GY:k \overset{e_2}{\underset{f_2}{\rightharpoonup}}$	$e_1 = kf_2$ $f_1 = \frac{e_2}{k}$

FIGURA 1.8: Elementos de dos puertos para grafos de enlaces de potencia

Tipo de Elemento	Símbolo	Relaciones
Unión Tipo 0	e_2 f_2 e_1 f_1 0 e_3 f_3 f_4 e_4	$e_1 = e_2 = e_3 = e_4$ $f_1 = f_2 + f_3 + f_4$
Unión Tipo 1	e_2 f_2 e_1 f_1 1 e_3 f_3 f_4 e_4	$e_1 = e_2 + e_3 + e_4$ $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$

FIGURA 1.9: Elementos multipuerto para grafos de enlaces de potencia

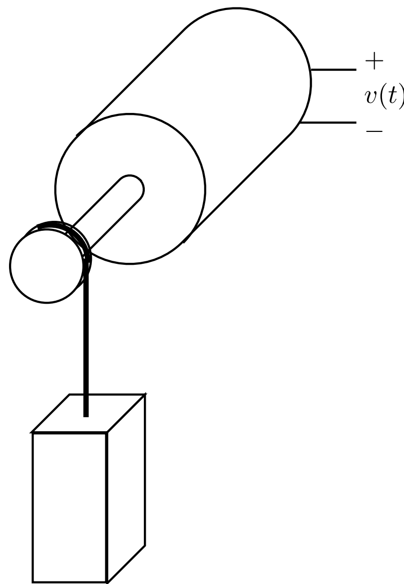


FIGURA 1.10: Grafos de enlace de potencia. Diagrama del ejemplo 1.1

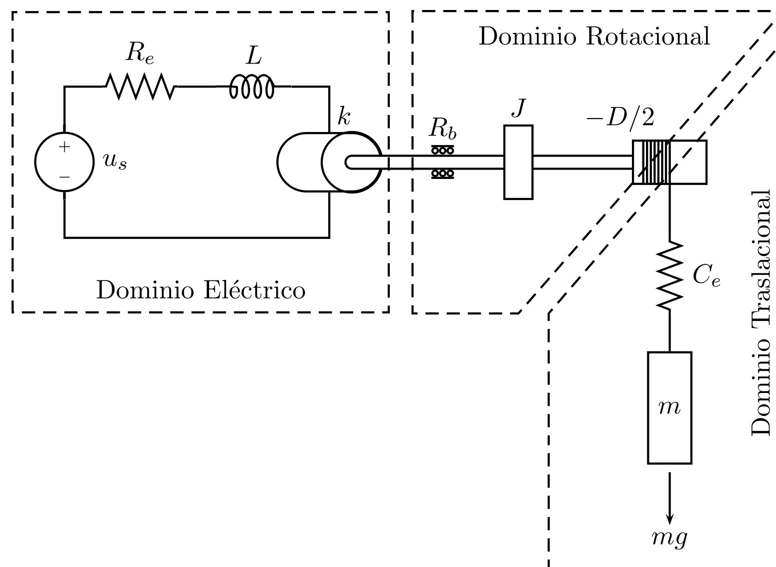


FIGURA 1.11: Grafos de enlace de potencia. Esquema del ejemplo 1.1

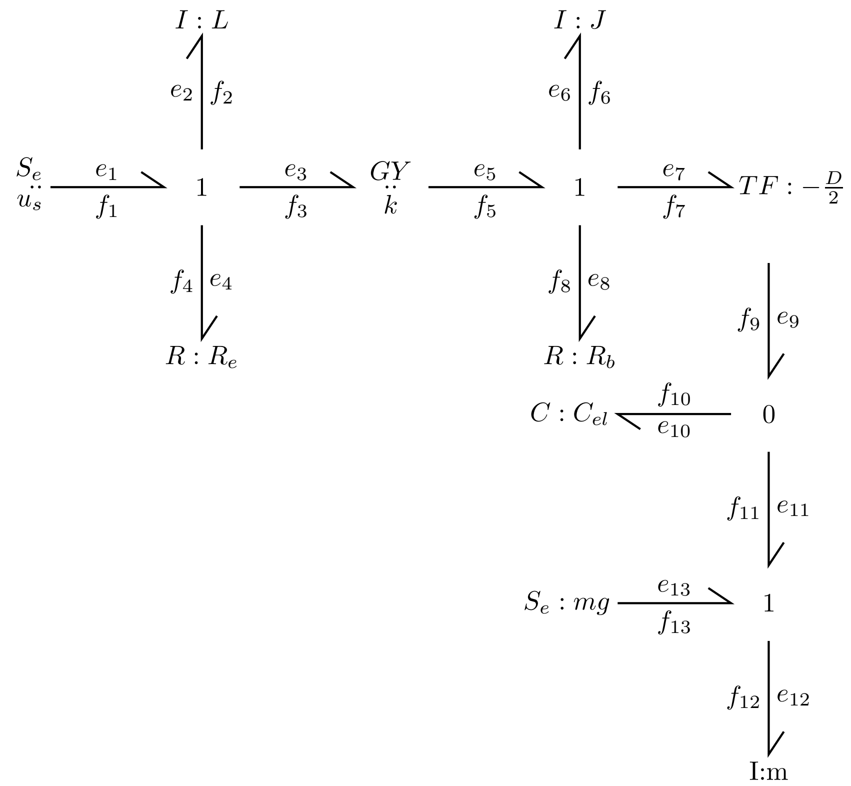


Figura 1.12: Grafo de enlaces de potencia del ejemplo 1.1



FIGURA 1.13: Enlaces con marcas de causalidad

1.3.2. Causalidad

En las figuras 1.7 y 1.8 se observa que las relaciones entre esfuerzo y flujo pueden escribirse de dos formas diferentes para algunos de los elementos:

- Salida de Esfuerzo: se calcula e en función de f, por ejemplo $e = g(f)$.
- Salida de Flujo: se calcula f en función de e, por ejemplo $f = g(e)$.

La figura 1.13 muestra cómo se modifica el símbolo del enlace cuando se toma cada una de las dos alternativas, agregando unas *marcas de causalidad* en alguno de los extremos del enlace.

El análisis de causalidad permite determinar cuál de los dos tipos de relaciones debe emplearse en cada enlace. Para ello, es necesario definir las siguientes relaciones de causalidad:

Causalidad fija: en ocasiones sólo es posible un tipo de causalidad, como por ejemplo en las fuentes de Esfuerzo y Flujo; en estas situaciones la causalidad está predeterminada.

Causalidad condicionada: en los elementos de más de un puerto la causalidad está condicionada por las siguientes reglas:

- En un rotador cada uno de sus puertos debe tener una causalidad diferente.
- En un transformador ambos puertos deben tener la misma causalidad.
- En las uniones tipo 0 sólo hay una marca de causalidad en el lado de la unión.
- En las uniones tipo 1 sólo hay una marca de causalidad que no esté del lado de la unión.

Causalidad preferida: en los elementos cuya relación esfuerzo-flujo puede ser una integral o una derivada, en este texto se prefiere la relación de derivación[2], por lo tanto se tiene que:

[2]La integración es preferible para la utilización de métodos numéricos.

- Para elementos tipo C se prefiere la causalidad de salida de flujo.
- Para elementos tipo I se prefiere la causalidad de salida de esfuerzo.

Causalidad indiferente: en las relaciones estáticas, como la de los elementos R se obtiene el mismo tipo de ecuación con cualquiera de las dos causalidades, y por lo tanto ésta es indiferente.

Para determinar la causalidad de un grafo, se emplea el siguiente procedimiento:

1. Asignar una causalidad fija y propagarla a través de las causalidades condicionadas. Repetir el procedimiento con todas las causalidades fijas.
2. Asignar una causalidad preferida y propagarla a través de las causalidades condicionadas. Repetir el procedimiento con todas las causalidades preferidas.
3. Asignar una causalidad indiferente y propagarla a través de las causalidades condicionadas. Repetir el procedimiento con todas las causalidades indiferentes.

Ejemplo 1.2 Retomando el ejemplo 1.1, cuyo grafo de enlaces de potencia se muestra en la figura 1.12, el procedimiento de asignación de causalidades permite obtener el grafo causal de la figura 1.14.

1.3.3. Obtención de las ecuaciones

A partir de un grafo causal se pueden derivar las ecuaciones diferenciales que describen el sistema con el siguiente procedimiento:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones algebráicas de cada uno de los elementos del grafo.
2. Eliminar las ecuaciones algebráicas.

Ejemplo 1.3 Las ecuaciones del grafo causal de la figura 1.14 (Ejemplos 1.1 y 1.2) se obtienen así:

- Enlace 1: $e_1 = u_s$
- Enlace 2: $e_2 = Ldf_2/dt$
- Enlace 4: $f_4 = e_4/R_e$
- Primera unión: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$ $\quad e_1 = e_2 + e_3 + e_4$
- Rotador: $e_3 = Kf_5$ $\quad f_3 = \frac{1}{K}e_5$
- Enlace 6:$e_6 = Jdf_6/dt$

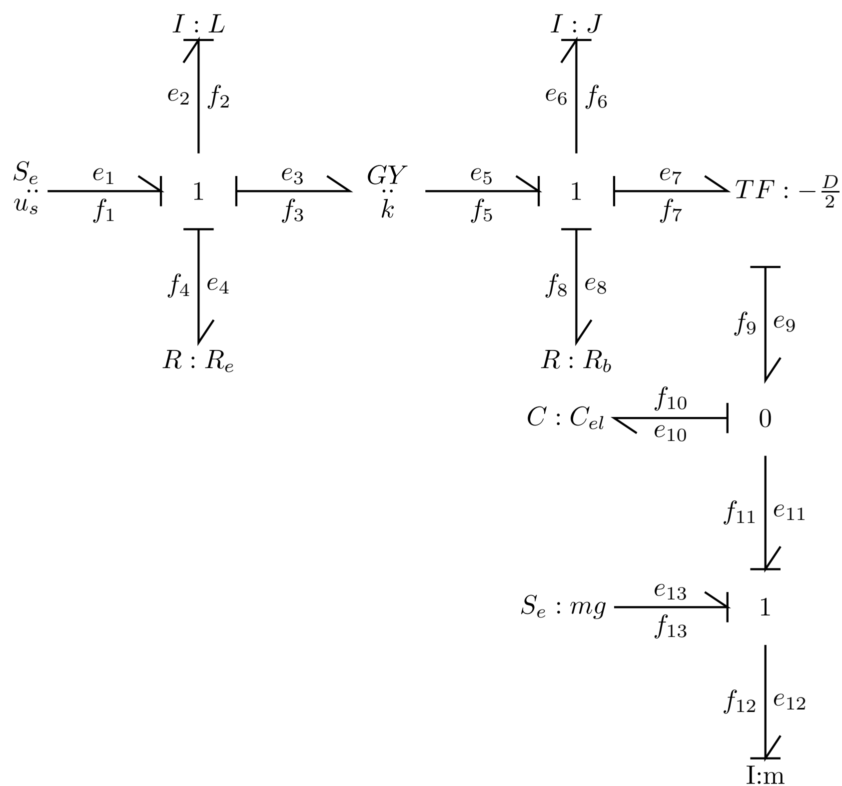


FIGURA 1.14: Grafo causal de enlaces de potencia del ejemplo 1.1

- Enlace 8:$f_8 = e_8/R_b$
- Segunda unión: $f_5 = f_6 = f_7 = f_8$ $\qquad e_5 = e_6 + e_7 + e_8$
- Transformador: $e_7 = -\frac{D}{2}e_9$ $\qquad f_7 = -\frac{2}{D}f_9$
- Enlace 10: $f_{10} = C_{el}de_{10}/dt$
- Tercera unión: $e_9 = e_{10} = e_{11}$ $\qquad f_9 = f_{10} + f_{11}$
- Enlace 12: $e_12 = mde_{12}/dt$
- Enlace 13: $f_{13} = mg$
- Cuarta unión: $f_{11} = f_{12} = f_{13}$ $\qquad e_{12} = e_{11} + e_{13}$

1.3.4. Procedimientos específicos

Se consignan aquí dos procedimientos específicos, útiles para la obtención de grafos de enlaces de potencia para circuitos eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales, respectivamente.

Circuitos eléctricos

1. Crear una unión tipo 0 por cada nodo del circuito.
2. Para cada elemento del circuito crear una unión tipo 1, adicionarle a esa unión un enlace que represente al elemento y enlazar la unión con las dos uniones tipo 0 correspondientes a los nodos entre los que está conectado el elemento.
3. Asignar las direcciones de potencia a los enlaces.
4. Si hay un nodo de referencia, eliminar la unión tipo 0 correspondiente y los enlaces adyacentes.
5. Simplificar el grafo.

Sistemas traslacionales

1. Crear una unión tipo 1 para cada velocidad diferente (absolutas y relativas).
2. Para cada fenómeno que genere una fuerza, crear una unión tipo 0, adicionarle a esa unión un enlace que represente al fenómeno y enlazar la unión con las dos uniones tipo 1 correspondientes; considerar las inercias.
3. Asignar las direcciones de potencia a los enlaces.
4. Eliminar la unión tipo 1 correspondiente a velocidad cero.
5. Simplificar el grafo.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

2.1. Ecuaciones diferenciales y de diferencia

2.1.1. Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una ecuación en la que intervienen derivadas (y/o integrales). La variable que mide el tiempo (t) varía continuamente ($t \in \mathbb{R}$). Un ejemplo sencillo es el siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t) \tag{2.1}$$

La *solución* de una ecuación diferencial es una función $f(t)$ $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación. Cualquiera de las siguientes funciones es solución de la ecuación (2.1):

- $f_1(t) = e^{2t}$ ya que $\frac{df_1}{dt} = 2e^{2t} = 2f_1(t)$
- $f_2(t) = 2e^{2t}$ ya que $\frac{df_2}{dt} = 4e^{2t} = 2f_2(t)$
- $f_3(t) = 3e^{2t}$ ya que $\frac{df_3}{dt} = 6e^{2t} = 2f_3(t)$

Para poder establecer una única solución de la ecuación, es preciso conocer unas *condiciones auxiliares*. El número de estas condiciones necesarias es igual al grado de la ecuación (n). Usualmente, en las aplicaciones de análisis de sistemas dinámicos, estas condiciones se determinan para el instante de tiempo $t = 0$, por lo que se denominan *condiciones iniciales*, y corresponden al valor de la función desconocida y de sus derivadas en $t = 0$

$$f(0),\ \dot{f}(0),\ \ddot{f}(0),\ \dddot{f}(0),\ \cdots,\ f^{(n)}(0)$$

Por ejemplo, al establecer $f(0) = 1$ como condición adicional para la ecuación (2.1), la única solución válida es $f_1(t) = e^{2t}$

2.1.2. Ecuaciones de diferencias finitas

Una *ecuación de diferencias* es una ecuación en la que intervienen diferencias finitas. La variable que mide el tiempo (k) varía discretamente . En general, existen tres posibilidades para considerar la forma en que se produce esta variación discreta:

$$k = 1, 2, 3, \cdots$$
$$k = T, 2T, 3T, \cdots \quad T \in \mathbb{R} k = k_1, k_2, k_3, \cdots \quad k_i \in \mathbb{R}$$

En la primera opción el tiempo es una variable entera ($k \in \mathbb{Z}$), mientras que en la segunda es una variable real que sólo toma ciertos valores espaciados uniformemente. En este texto se adoptará la primera opción. No obstante, debe aclararse que la segunda opción es muy empleada en aplicaciones de control digital y tratamiento de señales, en las que la elección adecuada del valor de T resulta de extrema importancia[1].

El siguiente es un ejemplo sencillo de una ecuación de diferencias

$$x(k + 1) = 2x(k) \tag{2.2}$$

Nótese la similitud con el ejemplo de la ecuación 2.1, en el que la derivada de primer orden ha sido reemplazada por la diferencia finita de primer orden. Como el tiempo no es continuo, no tiene sentido hablar de derivadas e integrales de las funciones, pues las variables no son continuas en ningún punto.

La *solución* de una ecuación de diferencias es una función $f(k)$ $k \in \mathbb{Z}$ que satisfaga la ecuación. Cualquiera de las siguientes funciones es solución de la ecuación (2.2):

- $f_1(k) = 2^k = 1, 2, 4, \cdots$ ya que $f_1(k + 1) = 2^{k+1} = 2f_1(k)$
- $f_2(k) = 2(2^k) = 2, 4, 8, \cdots$ ya que $f_2(k + 1) = 2(2^{k+1}) = 2f_2(k)$
- $f_3(k) = 3(2^k) = 3, 6, 12, \cdots$ ya que $f_2(k + 1) = 3(2^{k+1}) = 2f_3(k)$

Para poder establecer una única solución de la ecuación, es preciso conocer unas *condiciones auxiliares*. El número de estas condiciones necesarias es igual al grado de la ecuación (n). Usualmente, en las aplicaciones de análisis de sistemas dinámicos, estas condiciones se determinan para el instante de tiempo $k = 0$, por lo que se denominan *condiciones iniciales*, y corresponden al valor de la función desconocida y de sus diferencias en $k = 0$:

$$f(k),\ f(k + 1),\ f(k + 2),\ f(k + 3),\ \cdots, f(k + n) \qquad \text{con } k = 0$$

[1] En general el problema surge al considerar que un mismo sistema puede describirse por ecuaciones diferenciales y de diferencia en forma simultánea. En este texto se considerarán sólo sistemas continuos o discretos, pero nunca una mezcla de ambos.

Ecuaciones diferenciales	***Ecuaciones de diferencia***
Intervienen derivadas.	Intervienen diferencias finitas.
El tiempo (t) varía continuamente ($t \in \mathbb{R}$)	El tiempo (k) varía discretamente ($k \in \mathbb{Z}$).
La *solución* es una función $f(t)$ $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación.	La *solución* es una función $f(k)$ $k \in \mathbb{Z}$ (una sucesión) que satisfaga la ecuación.
Para poder establecer una única solución de la ecuación se emplean tantas condiciones iniciales como orden tenga la ecuación.	Para poder establecer una única solución de la ecuación se emplean tantas condiciones iniciales como orden tenga la ecuación.
Las condiciones iniciales son $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \cdots$	Las condiciones iniciales son $y(0), y(1), y(2), \cdots$

TABLA 2.1: Comparación entre ecuaciones diferenciales y de diferencia

es decir:

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots, f(n)$$

Por ejemplo, al establecer $f(0) = 1$ como condición adicional para la ecuación (2.2), la única solución válida es $f_1(k) = 2^k$

La tabla 2.1 resume una comparación entre las ecuaciones diferenciales y de diferencia. Debido a las grandes semejanzas entre los dos tipos de ecuaciones, en ocasiones nos referiremos a ambas simultáneamente empleando la sigla E.D.

2.1.3. Ecuaciones diferenciales y de diferencias lineales

Linealidad

La *linealidad* es una propiedad de algunas funciones. Para poseer esta propiedad es necesario satisfacer dos condiciones. Sea la función $f(x) : U \to V$, para $x_1, x_2 \in U$ y a un escalar, las dos condiciones son:

1. **superposición:** $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

2. **proporcionalidad:** $f(ax_1) = af(x_1)$

Las derivadas, las integrales y las diferencias finitas son operaciones lineales. La función $f(x) = ax + b$ no es una función lineal, a menos que b sea cero [2].

[2]Efectivamente, $f(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) + b$ es diferente de $f(x_1) + f(x_1) = (mx_1 + b) + (mx_2 + b)$

E.D. lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma:

$$a_n(t)\frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = b_m(t)\frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1(t)\frac{du}{dt} + b_0(t)u(t) \quad (2.3)$$

mientras que las ecuaciones de diferencia lineales son de la forma:

$$a_n(k)y(k+n) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = b_m(k)u(k+m) + \cdots + b_1(k)u(k+1) + b_0(k)u(k) \quad (2.4)$$

En este texto se estudian sólo ecuaciones con coeficientes constantes, es decir, los casos en los que las ecuaciones (2.3) y (2.4) se convierten en (2.5) y (2.6), respectivamente. Estas ecuaciones representarán el comportamiento de sistemas dinámicos como los de las figuras 3.1 y 3.2 en los que la variable u estimula al sistema, y la respuesta de éste se manifiesta en la variable y. Además sólo se estudiarán aquellos casos en los que $n \geq m$.

$$a_n\frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y(t) = b_m\frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{du}{dt} + b_0u(t) \quad (2.5)$$

$$a_ny(k+n) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_mu(k+m) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \quad (2.6)$$

2.1.4. Métodos de solución de E.D. lineales

La solución de una E.D. lineal tiene dos componentes:

$$\begin{gathered} y_{completa}(t) = y_{homogénea}(t) + y_{particular}(t) \\ y(t) = y_h(t) + y_p(t) \end{gathered} \quad (2.7)$$

o en el caso discreto:

$$\begin{gathered} y_{completa}(k) = y_{homogénea}(k) + y_{particular}(k) \\ y(k) = y_h(k) + y_p(k) \end{gathered} \quad (2.8)$$

Existen varios métodos de solución para las E.D. lineales. Aunque en general emplearemos los métodos de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$, inicialmente presentamos uno más elemental y dispendioso, resumido en la tabla 2.2.

Ecuaciones diferenciales	***Ecuaciones de diferencia***
1. Obtener la solución homogénea con el siguiente procedimiento: ▪ Se escribe el polinomio característico de la ecuación. ▪ Se obtienen las raíces λ_i del polinomio característico. ▪ Se construye la solución $y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$ 2. Obtener una solución particular $y_p(t)$. Generalmente se procede "probando" una solución similar a la función de entrada, $u(t)$ 3. Construir la respuesta completa $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, reemplazar las condiciones iniciales y obtener los coeficientes $c_1, \cdots, c_n$	1. Obtener la solución homogénea con el siguiente procedimiento: ▪ Se escribe el polinomio característico de la ecuación. ▪ Se obtienen las raíces λ_i del polinomio característico. ▪ Se construye la solución $y_h(k) = c_1 \lambda_1^k + \cdots + c_n \lambda_n^k$ 2. Obtener una solución particular $y_p(t)$. Generalmente se procede "probando" una solución similar a la función de entrada, $u(k)$ 3. Construir la respuesta completa $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$, reemplazar las condiciones iniciales y obtener los coeficientes $c_1, \cdots, c_n$

Tabla 2.2: Métodos elementales de solución de ecuaciones diferenciales y de diferencia

Ejemplo 2.1 Obtener la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t) \tag{2.9}$$

donde $f(t) = t^2 + 5t + 3$ y las C.I. son $y(0) = 2$ $\dot{y}(0) = 3$

1. Obtener la solución homogénea. El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$
$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

Las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -2$

La solución homogénea es:

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \tag{2.10}$$

2. Obtener una solución particular:

Dado que $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos una solución particular de esa misma forma:

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Calculamos $\ddot{y}_p(t)$, $\dot{y}_p(t)$ y $\dot{f}(t)$:

$$\dot{y}_p(t) = 2\beta_2 t + \beta_1$$
$$\ddot{y}_p(t) = 2\beta_2$$
$$\dot{f}(t) = 2t + 5$$

Reemplazamos en la E.D.:

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

que podemos agrupar así:

$$2\beta_2 t^2 + (6\beta_2 + 2\beta_1)t + (2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0) = 2t + 5$$

Al igualar coeficientes obtenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 2\beta_2 \quad &= 0 \\ 6\beta_2 + 2\beta_1 \quad &= 2 \\ 2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0 \quad &= 5 \end{aligned}$$

cuya solución es $\beta_2 = 0$ $\beta_1 = 1$ $\beta_0 = 1$, y por lo tanto la solución particular es:

$$y_p(t) = t + 1 \tag{2.11}$$

3. Construir la respuesta completa, y obtener los coeficientes de la respuesta homogénea. La respuesta completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + t + 1$$

y su primera derivada es:

$$\dot{y}(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} + 1$$

Al evaluar en $t = 0$ obtenemos las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1e^{-0} + c_2e^{-0} + 0 + 1 = c_1 + c_2 + 1 = 2$$

$$\dot{y}(0) = -c_1e^{-0} - 2c_2e^{-0} + 1 = -c_1 - 2c_2 + 1 = 3$$

Con estas dos ecuaciones se obtienen los valores de c_1 y c_2

$$c_1 = 4 \;\; c_2 = -3$$

Por lo tanto, la solución completa de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1 \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.2 Sea la Ecuación de diferencias:

$$2y(k+2) - 3y(k+1) + y(k) = f(k) \tag{2.13}$$

en donde $f(k) = k^2$ y las condiciones iniciales son $y(0) = 2$, $y(1) = 1$

Para obtener la solución de esta ecuación podríamos proceder con el método propuesto; en lugar de ello, vamos a presentar una alternativa numérica, que consiste en despejar de la ecuación la diferencia más grande, y calcularla iterativamente:

De la ecuación podemos despejar $y(k+2)$

$$y(k+2) = \frac{1}{2}\left(f(k) + 3y(k+1) - y(k)\right)$$

Con esta expresión podemos construir la siguiente tabla

k	$f(k)$	$y(k)$	$y(k+1)$	$y(k+2)$
0	0	$y(0) = 2$	$y(1) = 1$	$y(2) = 1/2$
1	1	$y(1) = 1$	$y(2) = 1/2$	$y(3) = 3/4$
2	4	$y(2) = 1/2$	$y(3) = 3/4$	$y(3) = 23/8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

FIGURA 2.1: Transformada de Laplace

2.2. Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

2.2.1. Definiciones

Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ de los reales en los reales,

$$f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Existe una función $\mathcal{L}$ denominada *transformada de Laplace* que toma como argumento $f(k)$ y produce una función $F(s)$ de los complejos en los complejos.

$$F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

La función $\mathcal{L}^{-1}$ denominada *transformada inversa de Laplace* toma como argumento $F(s)$ y produce $f(t)$, tal como se visualiza en la figura 2.1

La transformada de Laplace se define[3] como:

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.14}$$

Existe una definición alternativa, conocida como la *transformada bilateral de Laplace*, cuyos límites de integración son ($-\infty$ y ∞):

$$F_b(s) \doteq \mathcal{L}_\lfloor \{f(t)\} = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.15}$$

Debido a que nuestro interés se centra en el comportamiento de las señales a partir del instante de tiempo $t = 0$, trabajaremos con la versión unilateral de la transformada.

Transformada $\mathcal{Z}$

Dada una función $f(t)$ de los enteros en los reales,

$$f(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

[3]La integral que define la transformada de Laplace puede no converger para algunos valores de la variable compleja s,lo que establece una *región de convergencia* para la transformada de una determinada función. Este hecho es irrelevante para nuestras aplicaciones de soluciones de E.D. lineales.

$$f(k) \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} F(z)$$

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad \qquad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

FIGURA 2.2: Transformada $\mathcal{Z}$

Existe una función $\mathcal{Z}$ denominada *transformada* $\mathcal{Z}$ que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s)$ de los complejos en los complejos.

$$F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

La función $\mathcal{Z}^{-1}$ denominada *transformada inversa* $\mathcal{Z}$ toma como argumento $F(z)$ y produce $f(k)$, tal como se visualiza en la figura 2.2.

La transformada $\mathcal{Z}$ se define[4] como:

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \tag{2.16}$$

Existe una definición alternativa, conocida como la *transformada bilateral* $\mathcal{Z}$, cuyos límites de integración son ($-\infty$ y ∞):

$$F(z) \doteq \mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} \tag{2.17}$$

Debido a que nuestro interés se centra en el comportamiento de las señales a partir del instante de tiempo $k = 0$, trabajaremos con la versión unilateral de la transformada.

La tabla 2.3 muestra una comparación entre las definiciones de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$.

2.2.2. Propiedades

Las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ satisfacen ciertas propiedades que son muy similares para una y otra transformada; algunas de estas transformadas se listan en la tabla 2.4, y sus demostraciones se presentan en el apéndice A. De estas propiedades destacamos los siguientes hechos:

1. La propiedad de linealidad permite que la aplicación de estas transformadas a la solución de E.D. lineales sea bastante simple. Por el contrario, estas transformadas no suelen ser útiles para solucionar E.D. no lineales.

[4] De forma semejante al caso de la transformada de Laplace, la sumatoria que define la transformada $\mathcal{Z}$ puede no converger para algunos valores de la variable compleja z, estableciéndose así una *región de convergencia* para cada función. Este hecho es irrelevante para nuestras aplicaciones de soluciones de E.D. lineales.

Transformada de Laplace	***Transformada $\mathcal{Z}$***
$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ La transformada de Laplace se define como: $F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\}$ $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ *Transformada bilateral de Laplace*: $F_b(s) \doteq \mathcal{L}_b\{f(t)\}$ $F_b(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt$	$f(k) \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} F(z)$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ La transformada $\mathcal{Z}$ se define como: $F(z) \doteq \mathcal{Z}\{f(k)\}$ $F(z) = \sum_{k=0}^\infty f(k)z^{-k}$ *Transformada bilateral $\mathcal{Z}$*: $F_b(z) \doteq \mathcal{Z}_b\{f(k)\}$ $F_b(z) = \sum_{k=-\infty}^\infty f(k)z^{-k}$

TABLA 2.3: Comparación de las definiciones de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

2. Las propiedades de diferenciación y diferencias positivas son las que permiten convertir ecuaciones diferenciales y ecuaciones de diferencia, respectivamente, en ecuaciones algebráicas.

3. Hay una diferencia sutil pero importante entre las propiedades de diferenciación y diferencias positivas: la condición inicial $f(0)$ está multiplicada por z en el caso discreto, mientras que en el caso continuo no está multiplicada por s.

   Este hecho origina algunas diferencias en la forma de las parejas de funciones y sus transformadas (ver sección 2.2.3) y en la forma en que se emplea la expansión en fracciones parciales para calcular las transformadas inversas(ver sección 2.2.5).

4. La propiedad de multiplicación por el tiempo tiene una expresión directa en el caso continuo (multiplicación por t^n) mientras que en el caso discreto tiene una expresión iterativa (multiplicación por k^n). Este hecho se ve reflejado en la tabla 2.6.

5. La propiedad de convolución pone de manifiesto que la transformada del producto de dos funciones **NO** es el producto de las transformadas individuales.

Transformada de Laplace	***Transformada $\mathcal{Z}$***
Sean $f(t), f_1(t), f_2(t)$ tres funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente $F(s), F_1(s), F_2(s)$, y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:	Sean $f(k), f_1(k), f_2(k)$ tres funciones cuyas transformadas $\mathcal{Z}$ son, respectivamente $F(z), F_1(z), F_2(z)$ y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:
Linealidad:	**Linealidad:**
$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\}=F_1(s)+F_2(s)$$ $$\mathcal{L}\left\{af(t)\right\}=aF(s)$$	$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k)+f_2(k)\right\}=F_1(z)+F_2(z)$$ $$\mathcal{Z}\left\{af(k)\right\}=aF(z)$$
Diferenciación[5]:	**Diferencia positiva:**
$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0^+)$$	$$\mathcal{Z}\left\{f(k+1)\right\}=zF(z)-zf(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\}=s^nF(s) - \sum_{i=0}^{n-1}s^{n-i-1}f^{(i)}(0^+)$$	$$\mathcal{Z}\left\{f(k+n)\right\}=z^nF(z) - \sum_{i=0}^{n-1}z^{n-i}f(i)$$
Desplazamiento en frecuencia:	**Escalamiento en frecuencia:**
$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$$	$$\mathcal{Z}\left\{a^kf(t)\right\}=F(z/a)$$
Multiplicación por t:	**Multiplicación por k:**
$$\mathcal{L}\left\{t^nf(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$	$$\mathcal{Z}\left\{k^nf(k)\right\}= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left\{k^{(n-1)}f(k)\right\}$$
Teorema de valor inicial:	**Teorema de valor inicial:**
$$\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$	$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

[5] El superíndice $^{(i)}$ indica la derivada de orden i: $f^{(i)}=\frac{d^if}{dt^i}$

Teorema de valor final: $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$	**Teorema de valor final:** $$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$
Convolución: $$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$$ $$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$	**Convolución:** $$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = F_1(z)F_2(z)$$ $$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)f_2(h-k)$$

TABLA 2.4: Propiedades de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

2.2.3. Parejas de transformadas

La tabla 2.5 muestra las parejas de transformadas para las funciones elementales más importantes en el análisis de sistemas dinámicos. El contenido de la tabla se demuestra en el Apéndice A. De estas parejas destacamos los siguientes hechos:

1. En cada uno de los casos de las tablas 2.5 y 2.6, las transformadas (de Laplace o $\mathcal{Z}$) son fraccciones de polinomios en la variable compleja (s o z).

2. Al comparar estos polinomios en funciones análogas (por ejemplo e^{at} y a^k) notamos que el orden del denominador es el mismo; en el numerador, sin embargo, sucede que el orden de los polinomios de la transformada $\mathcal{Z}$ siempre es superior en 1 al de su contraparte en la transformada de Laplace.

3. Si centramos nuestra atención en la tabla 2.5, podemos notar que la ubicación de los polos, de las funciones transformadas en el plano complejo, determina el tipo de función en el dominio del tiempo. Este hecho se resalta en la tabla 2.7 y en las figuras 2.3 y 2.4 .

4. Las funciones reseñadas en la tabla 2.6 también están asociadas a una ubicación específica de los polos en el plano complejo, pero cuando éstos se repiten.

Transformada de Laplace		***Transformada $\mathcal{Z}$***	
$f(t)$	$F(s)$	$f(k)$	$F(z)$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mu(k)$	$\frac{z}{z-1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin ak$	$\frac{z \sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos ak$	$\frac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$
$e^{\sigma t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$b^k \sin ak$	$\frac{zb \sin a}{z^2-2bz\cos a+b^2}$
$e^{\sigma t}\cos \omega t$	$\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$b^k \cos ak$	$\frac{z^2-zb\cos a}{z^2-2bz\cos a+b^2}$

TABLA 2.5: Tabla de parejas de transformadas elementales

Transformada de Laplace		***Transformada $\mathcal{Z}$***	
$f(t)$	$F(s)$	$f(k)$	$F(z)$
$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$k\mu(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$t^n\mu(t)$	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$k^n\mu(k)$	*iterar*
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$	$k^n a^k$	*iterar*
$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$k\sin ak$	$\frac{z^3\sin a-z\sin a}{[z^2-2z\cos a+1]^2}$
$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$k\cos ak$	$\frac{[z^3+z]\cos a-2z^2}{[z^2-2z\cos a+1]^2}$
$te^{\sigma t}\sin \omega t$	$\frac{2\omega(s-\sigma)}{((s-\sigma)^2+\omega^2)^2}$	$kb^k\sin ak$	$\frac{z^3 b\sin a-zb^3\sin a}{[z^2-2bz\cos a+b^2]^2}$
$te^{\sigma t}\cos \omega t$	$\frac{(s-\sigma)^2-\omega^2}{((s-sigma)^2+\omega^2)^2}$	$kb^k\cos ak$	$\frac{[bz^3+b^3z]\cos a-2b^2z^2}{[z^2-2bz\cos a+b^2]^2}$

TABLA 2.6: Tabla de parejas de transformadas elementales multiplicadas por el tiempo

Caso Continuo		*Caso Discreto*	
Ubicación de los polos	**Función**	**Ubicación de los polos**	**Función**
Origen	escalón	$(1,0)$	escalón
Semieje real positivo	exponenciales crecientes	Intervalo $(1,\infty)$ del eje real	series geométricas crecientes no alternantes
		Intervalo $(-\infty,-1)$ del eje real	series geométricas crecientes alternantes
Semieje real negativo	exponenciales decrecientes	Intervalo $(0,1)$ del eje real	series geométricas decrecientes no alternantes
		Intervalo $(-1,0)$ del eje real	series geométricas decrecientes alternantes
Eje imaginario	sinusoidales	Circunferencia unitaria	sinusoidales.
Complejos en el semiplano derecho	funciones sinusoidales amplificadas por una exponencial creciente	Complejos fuera del círculo unitario	sinusoidales amplificadas por una serie geométrica creciente
Complejos en el semiplano izquierdo	sinusoidales amplificadas por una exponencial decreciente	Complejos dentro del círculo unitario	sinusoidales amplificadas por una serie geométrica decreciente

Tabla 2.7: Ubicación de los polos en los planos complejos y funciones en el tiempo

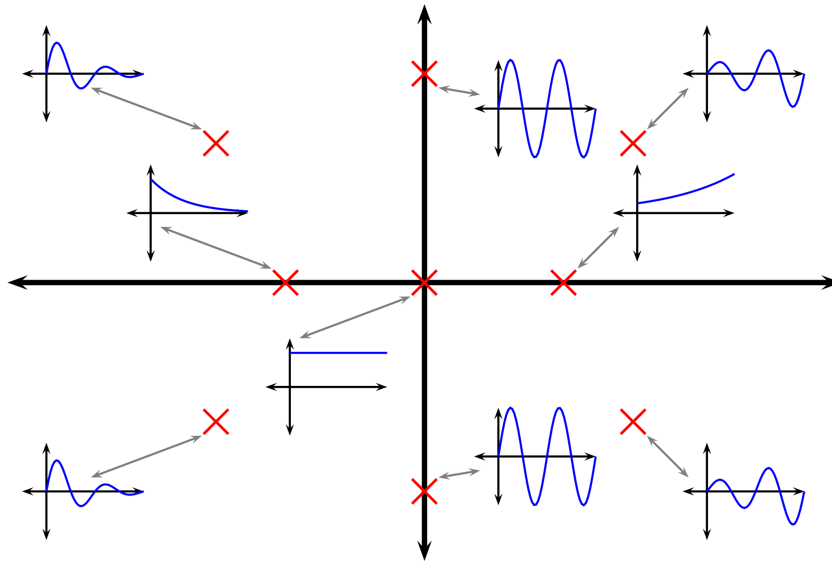


FIGURA 2.3: Funciones continuas según la ubicación de sus polos en el plano s

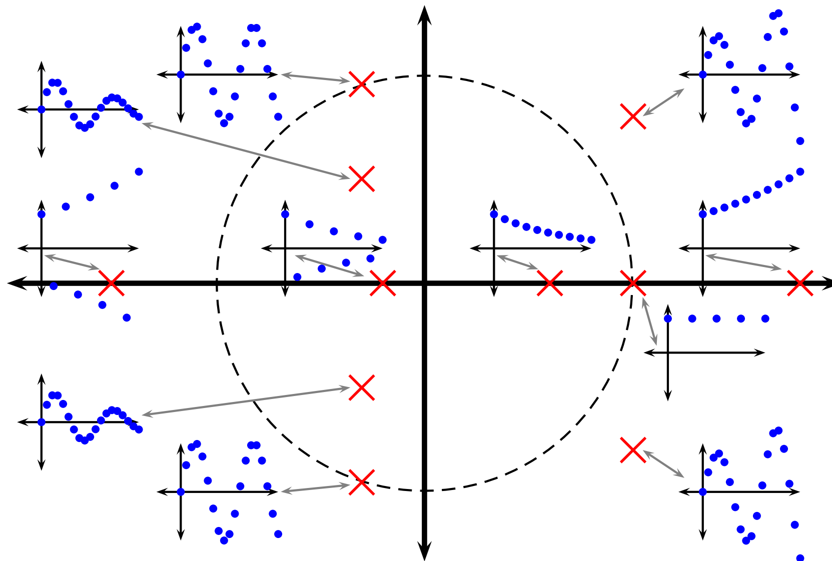


FIGURA 2.4: Funciones discretas según la ubicación de sus polos en el plano s

2.2.4. Utilización de la tabla de parejas de transformadas

Para emplear las tablas 2.5 y 2.6 para obtener la transformada inversa de una función, primero hay que expresar esta última como alguno de los casos que aparecen en dichas tablas. Suele ser útil recordar que las transformaciones de Laplace y $\mathcal{Z}$ son funciones lineales.

Ejemplo 2.3 Para obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{4}{s-3}$, primero reescribimos la $F(s)$ como:

$$F(s) = \frac{4}{s-3} = 4\frac{1}{s-3}$$

La expresión $\frac{1}{s-3}$ es de la forma $\frac{1}{s-a}$, cuya transformada inversa de Laplace es e^{at}. Aplicando linealidad tenemos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{4\frac{1}{s-3}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{3t}$$

Ejemplo 2.4 Para obtener la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$, primero destacamos que el denominador de $F(s)$ es de segundo orden, y por tanto es similar al que aparece en las transformadas de Laplace de las sinusoides amortiguadas. Con esto presente, buscamos reescribir $F(s)$ con el denominador en la forma $(s-\sigma)^2+\omega^2$. Para ello, nótese que:

$$(s-\sigma)^2+\omega^2 = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

Igualando los coeficientes podemos identificar $-2\sigma = 1$ (y por tanto $\sigma = -1/2$) y $\sigma^2+\omega^2 = 1$ (y por tanto $\omega^2 = 3/4$). En consecuencia, podemos reescribir $F(s)$ como:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$F(s) = \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

Los dos sumandos corresponden a transformadas de la forma $e^{\sigma t}\cos(\omega t) + e^{\sigma t}\sin(\omega t)$, por lo tanto:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Este resultado puede reescribirse utilizando la identidad trigonométrica:

$$A\cos\phi + B\sin\phi = C\cos(\phi+\theta)$$

con $C = \sqrt{A^2+B^2}$ y $\theta = -\tan^{-1}\frac{B}{A}$. Por lo tanto, $f(t)$ resulta ser:

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$
$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\sqrt{1+3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right]$$
$$f(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 60°\right)$$

2.2.5. Transformadas inversas por expansión de fracciones parciales

Una de las estrategias que pueden emplearse para obtener la transformada Inversa de Laplace (o $\mathcal{Z}$) de una función racional de polinomios en s (o z):

$$F(s) = \frac{\alpha_m s^m + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_n s^n + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}$$

consiste en reescribir $F(s)$ (o $F(z)$) como suma de funciones más sencillas, cuyas transformadas inversas sean posibles de obtener mediante la lectura de las tablas de parejas. Este procedimiento se conoce como la *expansión en fracciones parciales*.

El procedimiento general puede enumerarse como sigue:

1. Si $m \geq n$ entonces se realiza la división hasta obtener una fracción en la que el grado del polinomio del denominador sea mayor al del numerador; en los siguientes puntos se trabaja sólo con la fracción.

   Ejemplo 2.5

   $$F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s+1} = 2s - 1 + \frac{3}{s+1}$$

2. Identificar las raíces del polinomio del denominador (p_i), y cuántas veces se repite cada una de ellas (r_i, o multiplicidad de la raíz).

   $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\cdots(s-p_k)^{r_k}}$$

   Evidentemente la suma de las multiplicidades será n, el grado del polinomio $D(s)$

3. Escribir la fracción como suma de fracciones parciales:

   $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_{11}}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(s-p_1)^{r_1}} + \frac{A_{21}}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(s-p_k)^{r_k}}$$

4. Obtener los coeficientes A_{ij}

Este sencillo procedimiento tiene dos puntos de dificultad, el primero de los cuales es cómo encontrar las raíces de $D(s)$, y el segundo cómo obtener los coeficientes A_{ij}.

Para la obtención de las raíces suponemos que disponemos de algún tipo de procedimiento (analítico o computacional) para ello. Para la obtención de los coeficientes A_{ij}, por su parte, pueden seguirse los siguientes procedimientos, según sea el caso:

1. **Polos de multiplicidad 1**

   Si el polo p_i tiene multiplicidad 1, el coeficiente A_{i1} de la expansión podrá calcularse como:

$$A_{i1} = \{(s-p_i)F(s)\}|_{s=p_i} \tag{2.18}$$

Ejemplo 2.6

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_{21}}{s+4}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left.\left\{(s+2)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\right|_{s=-2} = \left.\left\{\frac{-3s+1}{(s+4)}\right\}\right|_{s=-2} = \frac{7}{2} \\ A_{21} &= \left.\left\{(s+4)\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}\right\}\right|_{s=-4} = \left.\left\{\frac{-3s+1}{(s+2)}\right\}\right|_{s=-4} = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{7/2}{s+2} + \frac{-13/2}{s+4}$$

2. **Polos de multiplicidad mayor que 1**

   Si el polo p_i tiene multiplicidad r_i, el coeficiente A_{ij} de la expansión podrá calcularse como:

$$A_{ij} = \frac{1}{(r_i-j)!}\left.\frac{d^{r_i-j}}{ds^{r_i-j}}\{(s-p_i)^{r_i}F(s)\}\right|_{s=p_i} \tag{2.19}$$

   Esta expresión también es válida para $r_i = 1$, si se considera que $0! = 1$, y que la derivada de orden cero es la misma función.

Ejemplo 2.7

$$F(s) = \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} = \frac{A_{11}}{(s+2)} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{13}}{(s+2)^3}$$

$$A_{13} = \frac{1}{(0)!}\,\frac{d^0}{ds^0}\left\{(s+2)^3\frac{4s^2-1}{(s+2)^3}\right\}\bigg|_{s=-2} = 4s^2-1\big|_{s=-2} = 15$$
$$A_{12} = \frac{1}{(1)!}\,\frac{d^1}{ds^1}\left\{(s+2)^3\frac{4s^2-1}{(s+2)^3}\right\}\bigg|_{s=-2} = 8s\big|_{s=-2} = 8(-2) = -16$$
$$A_{11} = \frac{1}{(2)!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s+2)^3\frac{4s^2-1}{(s+2)^3}\right\}\bigg|_{s=-2} = \frac{1}{2}\,8\big|_{s=-2} = 4$$

$$F(s) = \frac{4s^2-1}{(s+2)^3} = \frac{4}{(s+2)} + \frac{-16}{(s+2)^2} + \frac{16}{(s+2)^3}$$

El procedimiento anterior también es válido cuando las raíces del denominador son complejas:

Ejemplo 2.8

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A_{11}}{s-0} + \frac{A_{21}}{s-(-2+j3)} + \frac{A_{31}}{s-(-2-j3)}$$

$$A_{11} = \left\{(s)\frac{10}{s(s^2+4s+13)}\right\}\bigg|_{s=0} = \left\{\frac{10}{(s^2+4s+13)}\right\}\bigg|_{s=0} = \frac{10}{13}$$
$$A_{21} = \left\{(s-(-2+j3))\frac{10}{s(s^2+14s+13)}\right\}\bigg|_{s=-2+j3}$$
$$A_{21} = \left\{\frac{10}{s(s-(-2-j3))}\right\}\bigg|_{s=-2+j3}$$
$$A_{21} = \frac{10}{(-2+j3)(-2+j3-(-2-j3))} = \frac{10}{(-2+j3)(j6)} = -0.38+j0.26$$
$$A_{31} = \left\{(s-(-2-j3))\frac{10}{s(s^2+14s+13)}\right\}\bigg|_{s=-2-j3}$$
$$A_{31} = \left\{\frac{10}{s(s-(-2+j3))}\right\}\bigg|_{s=-2-j3}$$
$$A_{31} = \frac{10}{(-2-j3)(-2-j3-(-2-j3))} = \frac{10}{(-2-j3)(-j6)} = -0.38-j0.26$$

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} + \frac{-0.38+j0.26}{s-(-2+j3)} + \frac{-0.38-j0.26}{s-(-2-j3)}$$

Las fracciones complejas pueden sumarse (nótese que los numeradores y denominadores de una fracción son los conjugados de la otra):

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} - \frac{0.77s+3.08}{s^2+4s+13}$$

Otra estrategia

Existe otra posibilidad para obtener los coeficientes A_{ij}. Consiste en efectuar la suma de las fracciones parciales e igualar coeficientes.

También pueden combinarse las dos estrategias. Además, puede emplearse el hecho según el cual la suma de las fracciones debidas a polos complejos conjugados serán de la forma:

$$\frac{As+B}{s^2+Cs+D}$$

Ejemplo 2.9

$$F(s)=\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}=\frac{A_{11}}{s+2}+\frac{A_{21}}{s+4}$$

Al sumar las fracciones parciales se tiene:

$$\begin{aligned}F(s)=\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}&=\frac{A_{11}s+4A_{11}+A_{21}s+2A_{21}}{(s+2)(s+4)}\\&=\frac{(A_{11}+A_{21})s+(4A_{11}+2A_{21})}{(s+2)(s+4)}\end{aligned}$$

Al igualar coeficientes se genera un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases}A_{11}+A_{21}= & -3\\4A_{11}+2A_{21}= & 1\end{cases}\quad A_{11}=7/2\quad A_{21}=-13/2$$

$$F(s)=\frac{-3s+1}{(s+2)(s+4)}=\frac{7/2}{s+2}+\frac{-13/2}{s+4}$$

Ejemplo 2.10

$$F(s)=\frac{10}{s(s^2+4s+13)}=\frac{A_{11}}{s}+\frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

Obtenemos el primer coeficiente con 2.18:

$$A_{11}=\left.\left\{(s)\frac{10}{s(s^2+4s+13)}\right\}\right|_{s=0}=\left.\left\{\frac{10}{(s^2+4s+13)}\right\}\right|_{s=0}=\frac{10}{13}$$

Reescribimos la expansión e igualamos coeficientes:

$$F(s)=\frac{\frac{10}{13}}{s}+\frac{As+B}{s^2+4s+13}$$

$$F(s)=\frac{\frac{10}{13}s^2+4\frac{10}{13}s+3\frac{10}{13}+As^2+Bs}{s(s^2+4s+13)}$$

$$\begin{cases}\frac{10}{13}+A= & 0\\4\frac{10}{13}+B= & 0\end{cases}\quad A=-10/13\quad B=-40/13$$

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} + \frac{-\frac{10}{13}s - \frac{40}{13}}{s^2+4s+13}$$
$$F(s) = \frac{10}{s(s^2+4s+13)} = \frac{10/13}{s} - \frac{0.77s+3.08}{s^2+4s+13}$$

2.3. Solución de E.D. lineales mediante transformadas

La solución de Ecuaciones Diferenciales (o de diferencia) mediante transformadas emplea el siguiente procedimiento:

1. Aplicar la transformada (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a cada lado de la Ecuación.
2. Despejar la transformada de la función desconocida.
3. Aplicar la transformada inversa (de Laplace o $\mathcal{Z}$ según sea el caso) a la función desconocida.

Para la aplicación del último paso, suele ser conveniente utilizar la expansión en fracciones parciales.

Ejemplo 2.11 Resolver la ecuación diferencial

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 5\mu(k)$$

Con las condiciones iniciales : $y(0) = -1$, $y(1) = 2$.

1. Al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la ecuación se tiene:

$$\mathcal{Z}\{y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k)\} = \mathcal{Z}\{5\mu(k)\}$$

Debido a la propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} + 3\mathcal{Z}\{y(k+1)\} + 2\mathcal{Z}\{y(k)\} = 5\mathcal{Z}\{\mu(k)\}$$

Si denominamos por $Y(z)$ a $\mathcal{Z}\{y(k)\}$, y empleamos la propiedad de diferencias positivas, tenemos:

$$\left[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)\right] + 3\left[zY(z) - zy(0)\right] + 2Y(z) = 5\frac{z}{z-1}$$

Reemplazando los valores de las condiciones iniciales, tenemos:

$$\left[z^2Y(z) + z^2 - 2z)\right] + 3\left[zY(z) + z\right] + 2Y(z) = 5\frac{z}{z-1}$$

2. Para despejar la transformada de la función desconocida $Y(z)$ escribimos:

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]+z^2-2z+3z=5\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)\left[z^2+3z+2\right]=5\frac{z}{z-1}-z^2-z=\frac{-z^3+6z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{-z^3+6z}{(z-1)(z^2+3z+2)}=\frac{-z^3+6z}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

3. Para aplicar la transformada inversa $\mathcal{Z}$ primero efectuamos una expansión en fracciones parciales de $\frac{Y(z)}{z}$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{A_{11}}{z-1}+\frac{A_{21}}{z+1}+\frac{A_{31}}{z+2}$$

Los coeficientes se pueden calcular como:

$$A_{11}=\left\{\frac{-z^2+6}{(z+1)(z+2)}\right\}\bigg|_{z=1}=\frac{5}{6}$$

$$A_{21}=\left\{\frac{-z^2+6}{(z-1)(z+2)}\right\}\bigg|_{z=-1}=\frac{-5}{2}$$

$$A_{31}=\left\{\frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)}\right\}\bigg|_{z=-2}=\frac{2}{3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{-z^2+6}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{\frac{5}{6}}{z-1}+\frac{\frac{-5}{2}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z+2}$$

$$Y(z)=\frac{\frac{5}{6}z}{z-1}+\frac{\frac{-5}{2}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z+2}$$

La transformada inversa $\mathcal{Z}$ se puede obtener ahora en forma directa:

$$y(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\}=\frac{5}{6}\mu(k)+\frac{-5}{2}(-1)^k+\frac{2}{3}(-2)^k$$

Capítulo 3

Introducción al análisis de sistemas dinámicos lineales

En este capítulo se presentan algunas herramientas básicas del análisis de sistemas dinámicos. La sección 3.1 muestra cómo puede descomponerse la respuesta de cualquier sistema dinámico en las respuestas de entrada cero y de estado cero; a partir de esta última se presenta en la sección 3.2 la definición de función de transferencia; con esta definición, en las secciones 3.3 y 3.4 se presentan dos herramientas gráficas, los diagramas de bloques y los diagramas de flujo de señal; la respuesta al impulso se analiza en la sección 3.5.

3.1. Respuestas de estado cero y de entrada cero

3.1.1. Sistemas continuos



FIGURA 3.1: Sistema dinámico continuo

Supóngase un sistema dinámico lineal continuo como el de la figura 3.1, cuya relación entre la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ está descrita por la siguiente ecuación diferencial genérica:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \tag{3.1}$$

o en forma resumida:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a esta ecuación se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left\{y^{(i)}(t)\right\} = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left\{u^{(i)}(t)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(s^i U(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)$$

De esta ecuación podemos despejar $Y(s)$ como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s) + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i U(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} - \frac{\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

o de otra forma:

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] U(s) + \\ \left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right) - \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) muestra que la respuesta de un sistema dinámico continuo puede descomponerse en dos partes[1]:

Respuesta de estado cero: es la primera parte de la ecuación (3.2). Depende de la entrada $U(s)$ y no de las condiciones iniciales; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las condiciones iniciales son cero, es decir, si su estado inicial es cero (de allí su nombre).

Respuesta de entrada cero: es la segunda parte de la ecuación (3.2). Depende de las condiciones iniciales y no de la entrada $U(s)$; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si la entrada es cero (de allí su nombre).

3.1.2. Sistemas discretos



FIGURA 3.2: Sistema dinámico discreto

Supóngase un sistema dinámico lineal discreto como el de la figura 3.2, cuya relación entre la entrada $u(k)$ y la salida $y(k)$ está descrita por la siguiente ecuación de diferencias genérica:

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ b_n u(k+n) + \cdots + b_1 y(k+1) + b_0 u(k) \quad (3.3)$$

o en forma resumida:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k+i)$$

[1]Otra clasificación corresponde a *respuesta forzada* (con la forma de la entrada) y *respuesta natural* (con la forma debida al polinomio característico).

Al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$ a esta ecuación se tiene:

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{m} b_i u(k+i)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{Z}\left\{y(k+i)\right\} = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{Z}\left\{u(k+i)\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(z^i Y(z) - \sum_{j=0}^{i-1} z^{i-j} y(j)\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(z^i U(z) - \sum_{j=0}^{i-1} z^{i-j} u(j)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i Y(z) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^{i-j} y(j)\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i U(z) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} z^{i-j} u^(j)\right)$$

De esta ecuación podemos despejar $Y(z)$ como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i Y(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i U(z) + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^{i-k} y(j)\right) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^{i-k} u(j)\right)$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i U(z)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y^{(k)}(0^+)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} - \frac{\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} u^{(k)}(0^+)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}$$

o de otra forma:

$$Y(z) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}\right] U(s) + \left[\frac{\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i-1} j^{i-k} y(j)\right) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^{i-k} u(j)\right)}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}\right] \tag{3.4}$$

De forma semejante al caso continuo, la ecuación 3.4 muestra que la respuesta de un sistema dinámico continuo puede descomponerse en dos partes:

Respuesta de estado cero: es la primera parte de la ecuación 3.4. Depende de la entrada $U(z)$ y no de las condiciones iniciales; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las condiciones iniciales son cero, es decir, si su estado inicial es cero (de allí su nombre).

Respuesta de entrada cero: es la segunda parte de la ecuación 3.4. Depende de las condiciones iniciales y no de la entrada $U(z)$; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si la entrada es cero (de allí su nombre).

3.2. Funciones de transferencia

Se define la *función de transferencia* de un sistema continuo o discreto como la relación en el dominio de la frecuencia compleja entre salida y entrada con condiciones iniciales nulas

$$F(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{C.I.=0} \qquad F(z) = \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{C.I.=0}$$

De acuerdo con las ecuaciones 3.2 y 3.4, la función de transferencia será, para los casos continuo y discreto, respectivamente:

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i} \qquad F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^i}$$

Las expresiones

$$Y(s) = F(s)U(s) \qquad Y(z) = F(z)U(z)$$

sólo son válidas si las condiciones iniciales son nulas. En este caso, es posible representar gráficamente la relación entrada-salida del sistema mediante dos tipos de diagramas:

Diagramas de bloque: la figura 3.3 muestra un sistema como un *bloque* definido por la función de transferencia $F(s)$ o $F(z)$, que recibe una *señal de entrada* $U(s)$ o $U(z)$ y entrega una *señal de salida* $Y(s)$ o $Y(z)$. Estos diagramas se explican en la sección 3.3.

Diagramas de flujo de señal: la figura 3.4 muestra un sistema como dos señales $U(s)$ y $Y(s)$ (o $U(z)$ y $Y(z)$) relacionadas entre sí por la función de transferencia $F(s)$ o $F(z)$. Estos diagramas se explican en la sección 3.4



FIGURA 3.3: Diagrama de bloques mínimo



FIGURA 3.4: Diagrama de flujo de señal mínimo

3.3. Diagramas de bloques

Un sistema complejo puede representarse por distintos subsistemas interrelacionados. Estas relaciones pueden visualizarse mediante un *Diagrama de Bloques*.

La figura 3.5 muestra algunas de las equivalencias que rigen el álgebra de los diagramas de bloques. Éstas se emplean para obtener diagramas de bloques equivalentes reducidos, y así encontrar la función de transferencia de sistemas complejos.

Ejemplo 3.1 [2] Para obtener la función de transferencia equivalente del diagrama de la figura 3.6 inicialmente intentaríamos efectuar reducciones de bloques en cascada o en paralelo, pero en el diagrama no se identifica ninguno de estos bloques. No obstante, podemos efectuar una reducción con el siguiente procedimiento:

- Desplazamos el sumador que recibe la señal de b_1 (ver figura 3.7(a))
- Intercambiamos el orden de los dos sumadores contiguos, ya que la suma es conmutativa (ver figura 3.7(b))
- Efectuamos una reducción del bloque en retroalimentación resultante (ver figura 3.7(c))
- Efectuamos una reducción del bloque en cascada resultante (ver figura 3.7(d))
- Identificamos un bloque en paralelo (ver figura 3.7(e))
- Efectuamos la reducción del bloque en paralelo (ver figura 3.7(f))
- Efectuamos un desplazamiento del segundo sumador (ver figura 3.7(g))
- Identificamos un bloque en paralelo y un bloque en retroalimentación (ver figura 3.7(h))
- Efectuamos la reducción de los bloques identificados (ver figura 3.7(h))
- Efectuamos la reducción del bloque en cascada final (ver figura 3.7(i))

[2] Adaptado de [9]

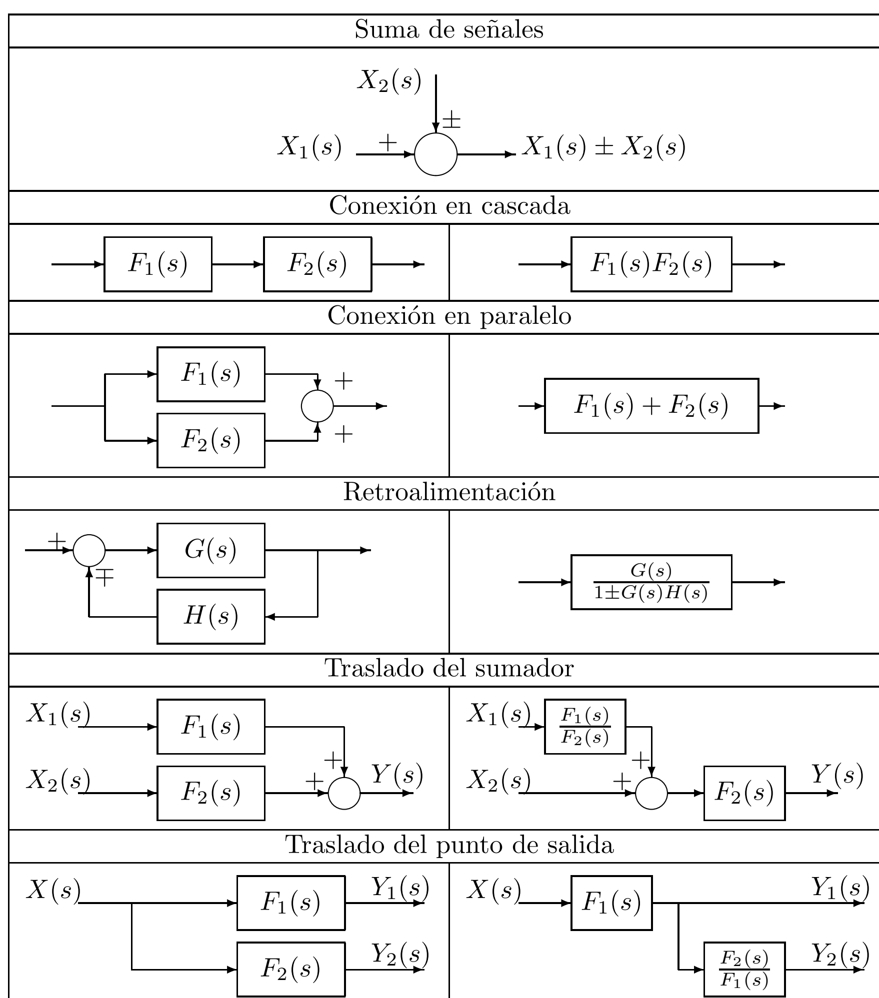


FIGURA 3.5: Equivalencias de los diagramas de bloques

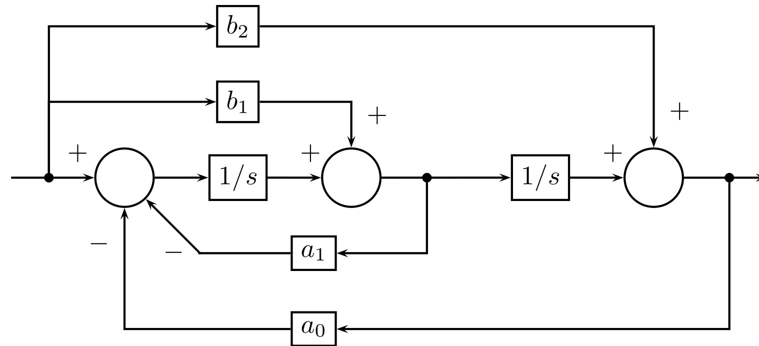


Figura 3.6: Diagrama de bloques del ejemplo 3.1

3.4. Diagramas de flujo de señal

La figura 3.8 presenta las relaciones básicas de un diagrama de flujo de señal. Nótese que el énfasis se pone en la señal y no en el sistema, a diferencia de los diagramas de bloques. Este es un texto de análisis de sistemas y no de análisis de señales, por esa razón preferimos los diagramas de bloques a los de flujo de señal.

No obstante lo anterior, el ejemplo 3.1 pone de manifiesto que para la obtención de la función de transferencia de un sistema a partir de su diagrama de bloques, es necesario desarrollar una habilidad específica debido a que no existe un algoritmo para ello. Por el contrario, si se utilizan diagramas de flujo de señal sí se cuenta con un procedimiento para la obtención de la función de transferencia, conocido como la *regla de Mason*.

La regla de Mason, que se explica en la sección 3.4.1, emplea las definiciones que se presentan a continuación y que se ilustran en el ejemplo 3.2.

Camino directo: conjunto de ramas que llevan de la entrada a la salida, sin repetirse.

Ganancia de camino directo: producto de las ganancias de las ramas que forman el camino directo.

Lazo cerrado: conjunto de ramas que parten de un nodo y llegan al mismo nodo, sin repetir ningún otro nodo.

Ganancia de lazo cerrado: producto de las ganancias de las ramas que forman un lazo.

Lazos adyacentes: lazos que comparten al menos un nodo.

Lazos no adyacentes: lazos que no comparten ningún nodo.

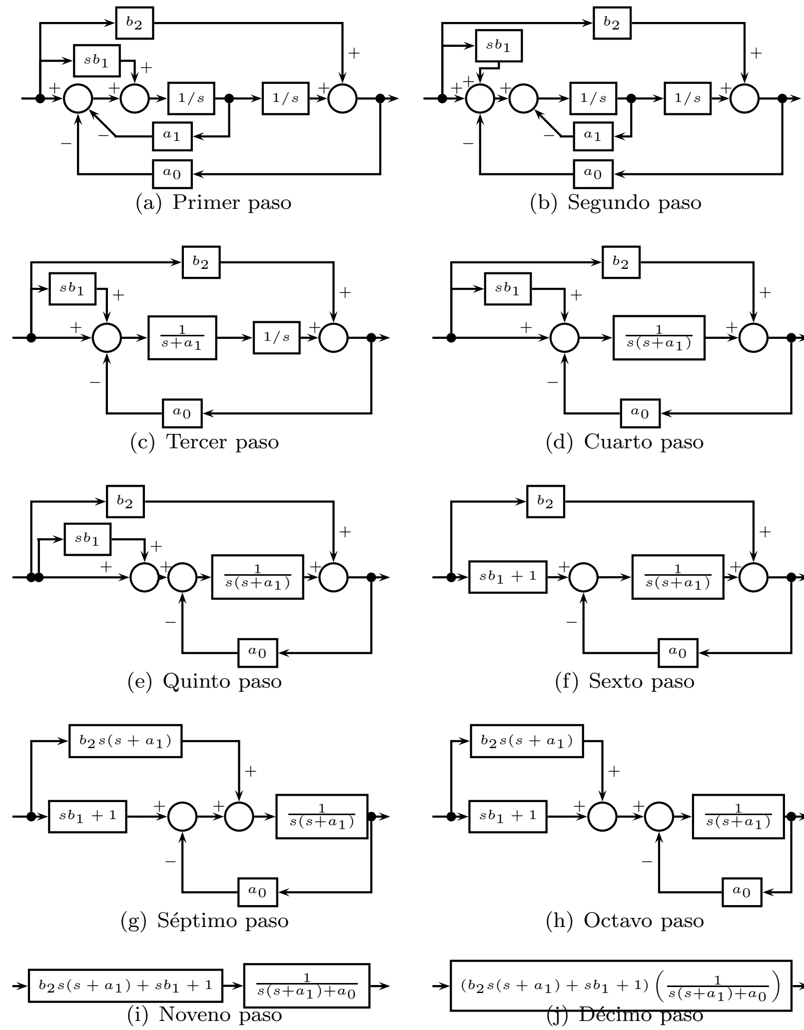


FIGURA 3.7: Solución del ejemplo 3.1

Nodos y Ramas	
$X(s) \xrightarrow{F(s)} Y(s)$	$Y(s) = F(s)X(s)$
Suma de Señales	
$X_3(s)$, $-F_3(s)$; $X_2(s)$, $F_2(s)$; $X_1(s)$, $F_1(s)$; $Y(s)$	$Y(s) = F_1(s)X_1(s) + F_2(s)X_2(s) - F_3(s)X_3(s)$

FIGURA 3.8: Equivalencias de los diagramas de flujo de señal

Ejemplo 3.2 Considérese el diagrama de flujo de señal de la figura 3.9(a)

Camino directo: las figuras 3.9(b) y 3.9(c) muestran los caminos directos. 3.2

Ganancia de camino directo: las ganancias de camino directo son:

- Figura 3.9(b): $T_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)$
- Figura 3.9(c): $T_2 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$ $G_{12}(s)G_6(s)$.

Lazo cerrado: las figuras 3.9(d) a 3.9(f) muestran los lazos del ejemplo.

Ganancia de lazo cerrado: las ganancias de lazo cerrado son:

- Figura 3.9(d): $L_1 = G_4(s)G_9(s)G_{10}(s)$
- Figura 3.9(e): $L_2 = G_6(s)G_7(s)G_8(s)$
- Figura 3.9(f): $L_3 = G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_{12}(s)G_{13}(s)$

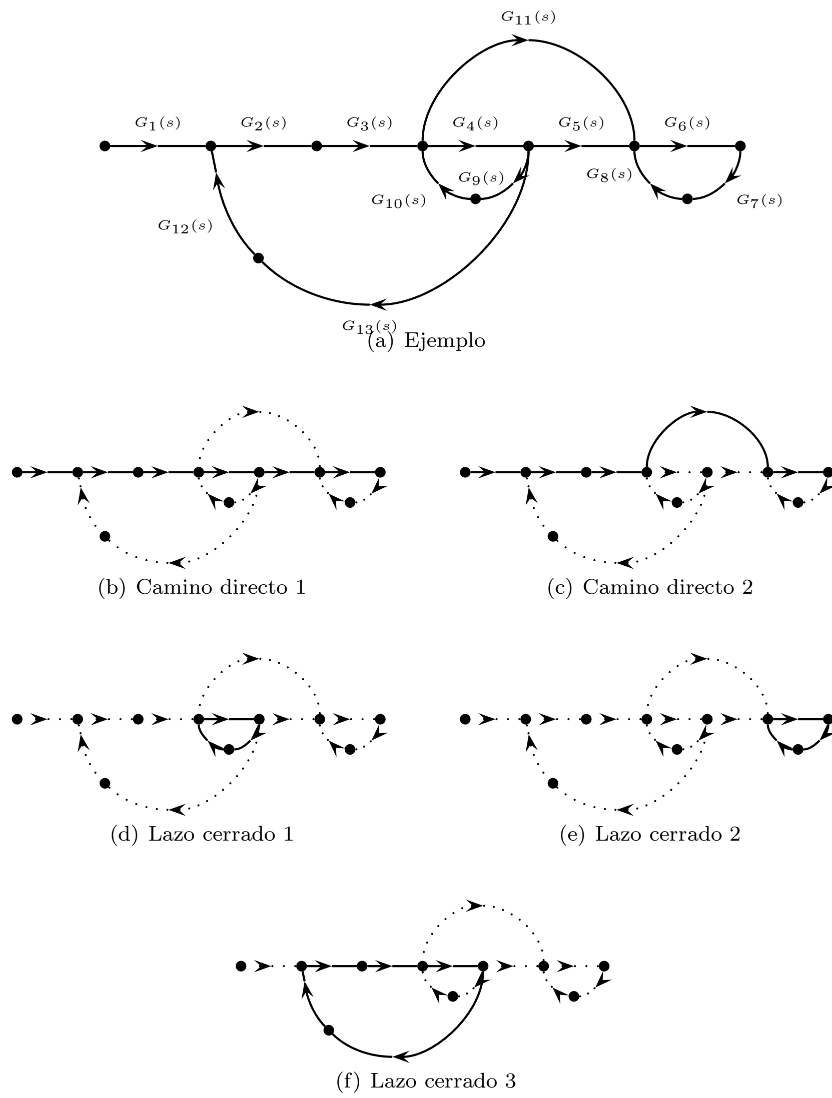
Lazos adyacentes: los lazos mostrados en las figuras 3.9(e) y 3.9(f) son adyacentes.

Lazos no adyacentes: los lazos mostrados en las figuras 3.9(d) y 3.9(e) son no adyacentes.

3.4.1. Regla de Mason

El cálculo de la función de transferencia $F(s)$ de un diagrama de flujo de señal esta dado por:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k \Delta_k}{\Delta}$$



(a) Ejemplo

(b) Camino directo 1

(c) Camino directo 2

(d) Lazo cerrado 1

(e) Lazo cerrado 2

(f) Lazo cerrado 3

FIGURA 3.9: Definiciones de diagramas de flujo de señal

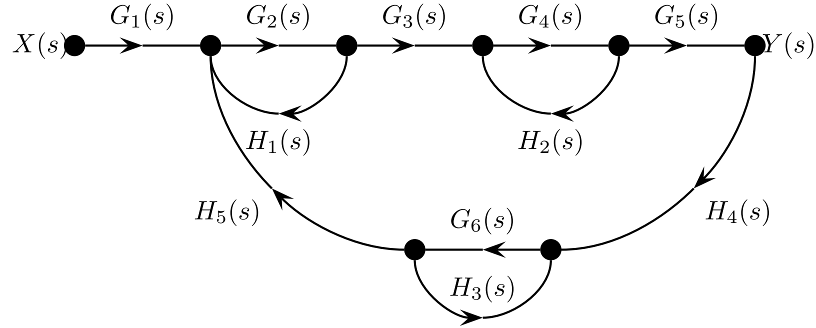


FIGURA 3.10: Diagrama de flujo de señal del ejemplo 3.3

Donde:

- p= Número de caminos directos de $X(s)$ a $Y(s)$
- T_k= Ganancia del camino directo número k
- Δ= 1
  - (Suma de ganancias de lazos cerrados)
  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes tomados de a 2)
  - (Suma de ganancias de lazos no adyacentes tomados de a 3)
  + (Suma de ganancias de lazos no adyacentes tomados de a 4)
  $- \cdots$
- Δ_k :Δ para el diagrama eliminando los lazos que tocan el camino número k

Ejemplo 3.3 Para el sistema de la figura 3.10 la aplicación de la regla de Mason es como sigue:

- Sólo existe un camino directo ($p = 1$), cuya ganancia es:

$$T_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

- Existen cuatro lazos cerrados, cuyas ganancias son:

$$\begin{aligned} L_1 &= G_2H_1 \\ L_2 &= G_4H_2 \\ L_3 &= G_6H_3 \\ L_4 &= G_2G_3G_4G_5H_4G_6H_5 \end{aligned}$$

- Como existen 4 lazos, hay 6 posibles grupos de 2 lazos (L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4, L_2L_3, L_2L_4, L_3L_4), pero de ellos, sólo son no adyacentes los siguientes:

$$\begin{aligned} L_1L_2 =& G_2H_1G_4H_2 \\ L_1L_3 =& G_2H_1G_6H_3 \\ L_2L_3 =& G_4H_2G_6H_3 \end{aligned}$$

- Como existen 4 lazos, hay 4 posibles grupos de 3 lazos ($L_1L_2L_3$, $L_1L_2L_4$, $L_1L_3L_4$, $L_2L_3L_4$), pero de ellos, sólo hay uno que es no adyacente:

$$L_1L_2L_3 = G_2H_1G_4H_2G_6H_3$$

- Como existen 4 lazos, sólo hay un posible grupo de 4 lazos ($L_1L_2L_3L_4$), pero estos son adyacentes.

- De acuerdo con lo anterior, el valor de Δ es:

$$\Delta = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -(L_1 + L_2 + L_3 + L3) \\ +(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) \\ -(L_1L_2L_3) \end{matrix} \right\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -(G_2H_1 + G_4H_2 + G_6H_3 + G_2G_3G_4G_5H_4G_6H_5) \\ +(G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_6H_3 + G_4H_2G_6H_3) \\ -(G_2H_1G_4H_2G_6H_3) \end{matrix} \right\}$$

- Al eliminar los lazos que tocan el único camino directo sólo subsiste el lazo L_3. Por lo tanto resulta:

$$\Delta_1 = 1 - (G_6H_3)$$

- Dado que sólo hay un camino directo, la función de transferencia se calcula como:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{p} T_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$F(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5(1 - (G_6H_3))}{\begin{matrix} 1-(G_2H_1+G_4H_2+G_6H_3+G_2G_3G_4G_5H_4G_6H_5) \\ +(G_2H_1G_4H_2+G_2H_1G_6H_3+G_4H_2G_6H_3) \\ -(G_2H_1G_4H_2G_6H_3) \end{matrix}}$$

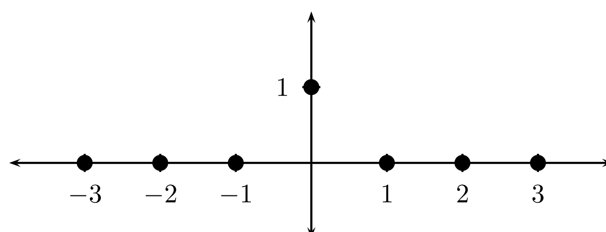


FIGURA 3.11: Función impulso unitario discreto

3.5. Respuesta al impulso

La función de transferencia presentada en la sección 3.2 permite caracterizar un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo, en situación de reposo, mediante una expresión en el dominio de la frecuencia compleja s o z. La *respuesta al impulso* logra esa misma caracterización, pero en el dominio del tiempo t o k, mediante el estudio del comportamiento del sistema cuando se estimula con una señal especial: el impulso unitario[3].

3.5.1. Caso discreto

La función impulso unitario discreto

Dado un sistema como el de la figura 3.2 la *respuesta al impulso* es la respuesta del sistema cuando la entrada es el *impulso unitario* $\delta(k)$, con condiciones iniciales nulas. La respuesta al impulso suele denotarse por $h(k)$, y su transformada $\mathcal{Z}$ por $H(z)$

La función $\delta(k)$ (ver figura 3.11) se define como:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Una de las características importantes de la función $\delta(k)$ es que su transformada $\mathcal{Z}$ es 1, tal como se muestra a continuación:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1$$

Supóngase un sistema discreto con condiciones iniciales nulas, con función de transferencia $F(z)$, que se excita con el impulso unitario (figura 3.12). La

[3]Pese a que en todo el texto se presentan los temas primero para el caso continuo y luego para el discreto, en esta sección se ha hecho una excepción, debido a que el caso discreto es notablemente más fácil de presentar que el continuo.

respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia z será el producto de la entrada por la función de transferencia:

$$H(z) = U(z)F(z) = 1F(z) = F(z)$$

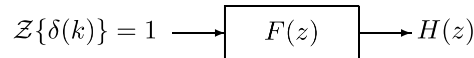


FIGURA 3.12: Sistema dinámico discreto estimulado con el impulso unitario

Este hecho pone de manifiesto la relación que existe entre la respuesta al impulso y la función de transferencia (ver figura 3.13): *la función de transferencia es la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso*

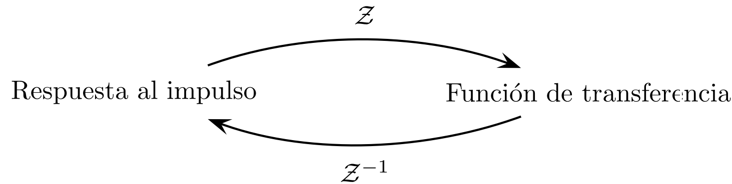


FIGURA 3.13: Relación entre la respuesta al impulso y la función de transferencia. Caso discreto

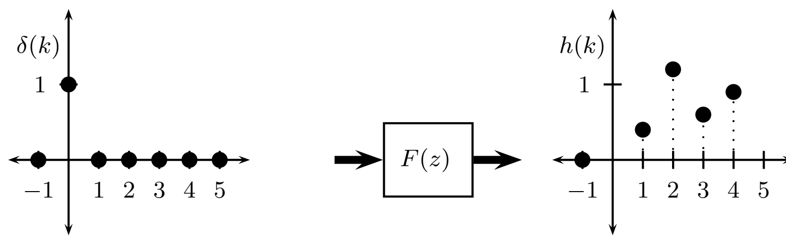
La respuesta a un impulso genérico

Supóngase un sistema discreto lineal, que es excitado con la función impulso $\delta(k)$, y cuya salida es la respuesta al impulso $h(k)$, tal como el de la figura 3.14(a). Si ese mismo sistema se excita con la función impulso, pero retrasada en 1, la salida debe ser la misma respuesta al impulso retrasada en 1, como se muestra en la figura 3.14(b) ya que se supone que el sistema es invariante en el tiempo.

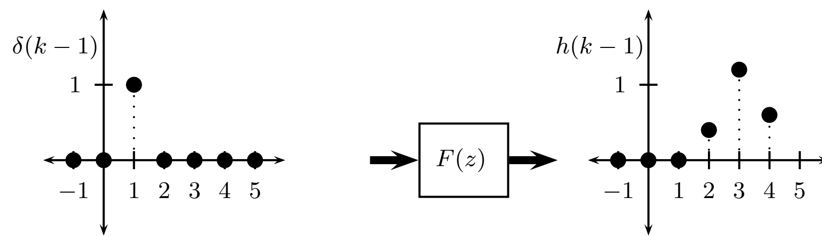
Por otra parte, debido a que el sistema es lineal, al multiplicar la entrada por un escalar c la salida se multiplicará por el mismo escalar c; por lo tanto, si el sistema recibe como entrada la señal impulso $c\delta(k-i)$, la salida será $ch(k-i)$ (ver figura 3.14(c)).

Convolución

Una señal discreta cualquiera $x(k)$ es un conjunto de valores en el tiempo, que puede representarse como la suma de infinitos impulsos individuales y_i, tal como se muestra en la figura 3.15.



(a) Respuesta al impulso discreto



(b) Respuesta al impulso discreto retrasado

$c\delta(k-i)$ → $F(z)$ → $ch(k-i)$

(c) Respuesta al impulso discreto genérica

Figura 3.14: Respuesta al impulso discreto

Además, cada uno de los pulsos individuales w_i puede representarse como un impulso aplicado en el instante de tiempo i, cuya amplitud es justamente $x(i)$. Dicho de otra forma, cualquier señal puede escribirse como:

$$x(k) = \cdots + x(-1)\delta(k-(-1)) + x(0)\delta(k-0) + x(1)\delta(k-1) + \cdots$$

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(k-i)$$

Debido a que el sistema es lineal, podemos aplicar el principio de superposición, y obtener la respuesta del sistema $y(k)$ cuando la entrada es $x(k)$ como la suma debida a cada uno de los impulsos w_i (suponiendo condiciones iniciales nulas). Estas respuestas son de la forma que se muestra en la figura 3.14(c), y por tanto la respuesta $y(k)$ será de la forma:

$$y(k) = \cdots + x(-1)h(k-(-1)) + x(0)h(k-0) + x(1)h(k-1) + \cdots$$

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i) = x(k) * h(k)$$

Esta última sumatoria corresponde a la *convolución discreta* de las señales $x(k)$ y $h(k)$, representada por el operador $*$

El resultado anterior no debe sorprender, ya que al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la igualdad se tiene:

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k) * h(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k)\}\mathcal{Z}\{h(k)\} = X(z)H(z)$$

y la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso resulta ser la función de transferencia del sistema, tal como se había mostrado ya en la figura 3.13.

3.5.2. Caso continuo

La función impulso unitario continuo

Para obtener con sistemas continuos un resultado similar al mostrado para sistemas discretos en la sección 3.5.1 es necesario contar con una función continua cuyas propiedades sean análogas a las de la función impulso discreto; es decir, se necesita una función cuya transformada de Laplace sea 1. Dicha función es la *función impulso* o *delta de Dirac*, generalmente representada por $\delta(t)$.

Para presentar la función $\delta(t)$, primero consideramos la función $d_\Delta(t)$, cuya gráfica se muestra en la figura 3.16:

$$d_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & t \in [0,\Delta] \\ 0 & t \notin [0,\Delta] \end{cases} \qquad \Delta > 0$$

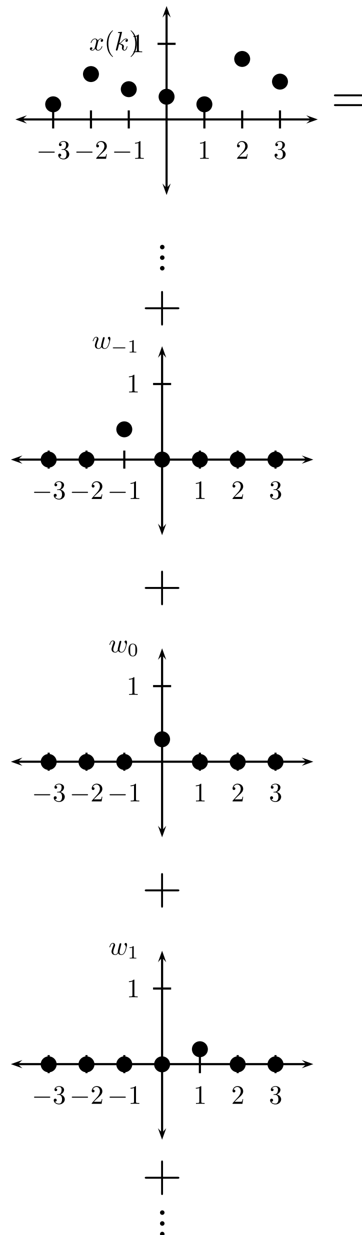


FIGURA 3.15: Descomposición de una señal discreta

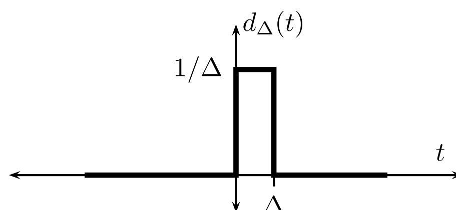


FIGURA 3.16: Función d_Δ

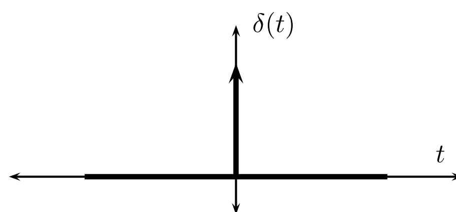


FIGURA 3.17: Función impulso unitario continuo

Nótese que el área bajo la gráfica de la función $d_\Delta(t)$ es 1, independientemente del valor de Δ, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\Delta(t)dt = 1 \qquad \forall\ \Delta > 0$$

Se define la función *delta de Dirac* como la función que resulta al disminuir Δ progresivamente, hasta llevarlo al límite en que tiende a cero:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} d_\Delta(t)$$

Esta función, cuya gráfica se muestra en la figura 3.17 conserva la propiedad según la cual el área bajo la gráfica es 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Además, si calculamos el área bajo la gráfica desde $-\infty$ hasta un valor t el resultado es la función *escalón unitario* $\mu(t)$

$$\int_{0^-}^{t} \delta(t)dt = \mu(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Por otra parte, consideremos el producto de la función $d_\Delta(t)$ desplazada en el tiempo, con una función $f(t)$ cualquiera, y calculemos el área bajo la gráfica

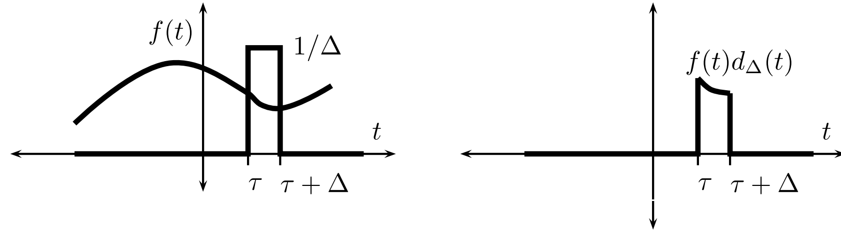


FIGURA 3.18: Área bajo la curva $f(t)d_\Delta$

de ese producto (ver figura 3.18)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_\Delta(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta} f(t)\frac{1}{\Delta}dt$$

Para valores de Δ suficientemente pequeños, el área puede hacerse equivalente a la de un rectángulo de base Δ y altura $f(\tau)\frac{1}{\Delta}$, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d_\Delta(t-\tau)dt = \Delta f(\tau)\frac{1}{\Delta} = f(\tau)$$

El límite puede introducirse en la integral, con lo que se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{\Delta\to 0} d_\Delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \tag{3.5}$$

Es posible demostrar que la transformada de Laplace del impulso es 1, es decir que

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = 1$$

Para ello, puede aplicarse directamente el resultado de la ecuación 3.5 o considerar la propiedad de la transformada de Laplace según la cual

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} x(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}}{s} = \frac{X(s)}{s}$$

Obsérvese que la transformada de Laplace de $\mu(t)$, que es $1/s$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}\left\{\mu(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} \delta(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}}{s} = \frac{1}{s}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

Respuesta al impulso

Dado un sistema como el de la figura 3.1 la *respuesta al impulso* es la respuesta del sistema cuando la entrada es el *impulso unitario* $\delta(t)$, con condiciones iniciales nulas. La respuesta al impulso suele denotarse por $h(t)$, y su transformada de Laplace por $H(s)$

Si el sistema continuo tiene una función de transferencia $F(s)$, (figura 3.19), la respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia s será el producto de la entrada por la función de transferencia:

$$H(s) = U(s)F(s) = 1F(s) = F(s)$$

Este hecho pone de manifiesto la relación que existe entre la respuesta al impulso y la función de transferencia (ver figura 3.20): *la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso*

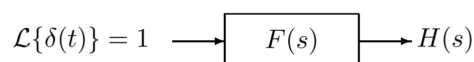


Figura 3.19: Sistema dinámico continuo estimulado con el impulso unitario

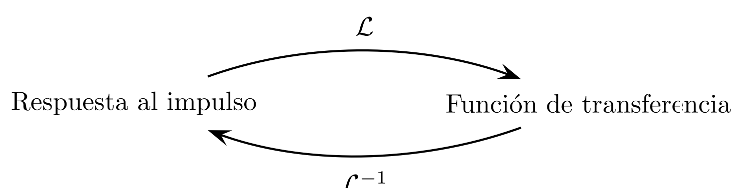


Figura 3.20: Relación entre la respuesta al impulso y la función de transferencia. Caso continuo

De manera semejante al caso discreto (ver sección 3.5.1) puede argumentarse que debido a que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la respuesta del sistema a una señal impulso genérica $c\delta(t-\tau)$ será $ch(t-\tau)$

Convolución

La ecuación 3.5 muestra que una señal cualquiera $x(t)$ puede representarse como la *convolución continua* entre $x(t)$ y $\delta(t)$ identificada con el operador $*$ (se han intercambiado las variables t y τ, lo que no altera el resultado):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

La integral es la suma de infinitos términos (términos infinitesimales), y por tanto podemos emplear el principio de superposición para obtener la respuesta del sistema $y(t)$ cuando la entrada es $x(t)$ como la suma debida a cada uno de los términos infinitesimales (suponiendo condiciones iniciales nulas), es decir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Al igual que en el caso discreto, la respuesta del sistema a una entrada cualquiera $x(t)$ se puede obtener como la convolución (continua) de esa entrada con la respuesta al impulso.

Este resultado concuerda con una afirmación previa, ya que al aplicar la transformada de Laplace a cada lado de la igualdad se tiene:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \mathcal{L}x(t)\mathcal{L}\{h(t)\} = X(s)H(s)$$

y la transformada de Laplace de la respuesta al impulso resulta ser la Función de transferencia del sistema, tal como se había mostrado ya en la figura 3.20.

Capítulo 4

Sistemas de primer y segundo orden

Los sistemas de primer y segundo orden merecen especial atención, ya que ellos presentan los comportamientos básicos que pueden aparecer en cualquier sistema dinámico. Dicho de otra forma, en general un sistema dinámico presentará un comportamiento que puede descomponerse en los comportamientos más simples de los sistemas de primer y segundo orden.

Este hecho puede explicarse observando el método de solución de E.D. que emplea expansión en fracciones parciales (ver sección 2.2.5): una fracción se descompone en fracciones más simples en donde los denominadores son polinomios de primer o segundo orden.

La excepción a esta regla la constituyen los sistemas con polos repetidos, en donde además aparecen los mismos comportamientos básicos multiplicados por t^n o k^n (ver tablas 2.5 y 2.6).

En este capítulo se estudian los sistemas continuos de primer y segundo orden. En todos los casos se procederá de la misma forma: se seleccionará una función de transferencia prototipo, se calculará su respuesta al escalón unitario[1] con condiciones iniciales nulas, y se analizará la relación existente entre esa respuesta y el valor de los polos de la función de transferencia. Las secciones 4.5 y 4.6 buscan resaltar que los resultados presentados en este capítulo son estrictamente válidos para las funciones prototipo seleccionadas.

[1] También denominado paso unitario.

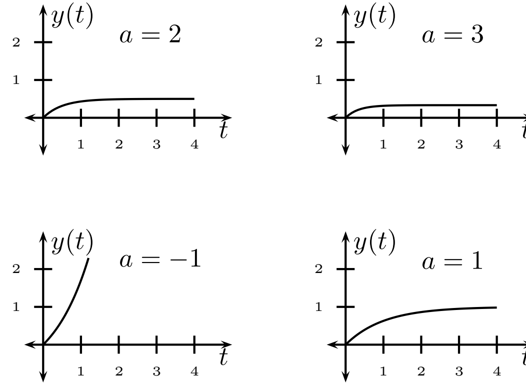


FIGURA 4.1: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden

4.1. Sistemas continuos de primer orden

Supóngase un sistema continuo de primer orden, cuya función de transferencia sea

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \tag{4.1}$$

Al estimular el sistema con un paso unitario $\mu(t)$, con condiciones iniciales nulas, la respuesta $y(t)$ puede calcularse como sigue:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{1}{(s+a)}\frac{1}{s} = \frac{1/a}{s} + \frac{-1/a}{s+a}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{a}\mu(t) - \frac{1}{a}e^{-at}\mu(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})\mu(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})\mu(t) \tag{4.2}$$

La expresión (4.2) muestra que la respuesta del sistema dependerá del valor de a. Este hecho se constata en la figura 4.1, que muestra las gráficas de $y(t)$ para distintos valores de a.

Al cambiar el valor de a también cambia el valor del único polo de la función de transferencia (4.1), que es $-a$. Para cualquier valor real positivo de a el polo es un real negativo $-a$, y viceversa. Cuando el polo es positivo, la respuesta del sistema tiende a infinito, y se dice que el sistema es *inestable*. La figura 4.2 muestra cuáles son las *regiones de estabilidad e inestabilidad* con referencia a la recta real, es decir, en qué lugares debe estar ubicado el polo de la función de transferencia para que el sistema sea, respectivamente, estable o inestable.

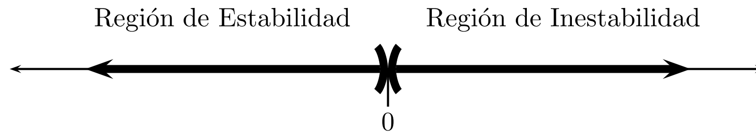


FIGURA 4.2: Regiones de estabilidad e inestabilidad para un sistema continuo de primer orden

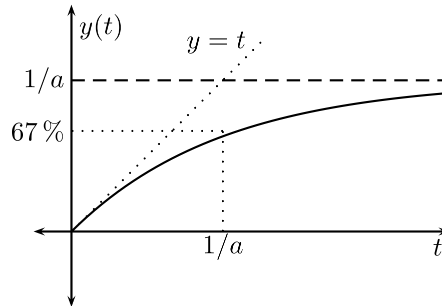


FIGURA 4.3: Respuesta al paso de un sistema continuo de primer orden, polo negativo en $-a$

Para un polo negativo cualquiera $-a$, la respuesta es como la que se muestra en la figura 4.3. El valor a determina qué tan empinada es la respuesta (y cuál será el valor final de la respuesta); para valores grandes de a, la respuesta es más empinada, debido a que la respuesta natural e^{-at} se extingue más rápido.

Para medir qué tan rápido decae una respuesta natural, podemos definir el *tiempo de asentamiento* o *tiempo de estabilización*, como el tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera un porcentaje de su valor máximo, por ejemplo el 5 %. Para el caso del sistema continuo de primer orden, este tiempo t_{as} satisface:

$$e^{-at_{as}} = 0.05 \qquad t_{as} = -\frac{\ln 0.05}{a} \qquad t_{as} \approx 3/a$$

En general, al alejar el polo del origen (al desplazarlo hacia la izquierda) disminuye el tiempo de asentamiento, es decir, la respuesta es más empinada. Esto nos permite definir una *región de tiempo de asentamiento máximo*, como la que se muestra en la figura 4.4. Si el polo de la función de transferencia (4.1) cae en esa región podemos asegurar que su tiempo de asentamiento satisface $t_{as} \leq 3/a$.

Nótese que la región de tiempo de asentamiento máximo está contenida dentro de la región de estabilidad; esto es lógico, ya que la definición de tiempo

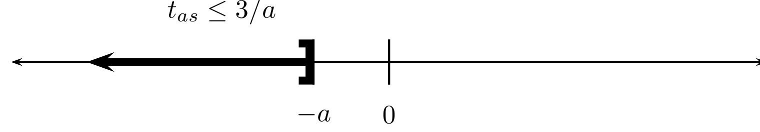


FIGURA 4.4: Región de tiempo de asentamiento máximo para un sistema continuo de primer orden

de asentamiento sólo tiene sentido para sistemas estables.

4.2. Sistemas discretos de primer orden

Supóngase un sistema discreto de primer orden, cuya función de transferencia sea

$$F(z) = \frac{1}{z+a} \tag{4.3}$$

Al estimular el sistema con un paso unitario $\mu(k)$, con condiciones iniciales nulas, la respuesta $y(k)$ puede calcularse como sigue:

$$Y(z) = F(z)U(z) = \frac{1}{(z+a)}\frac{z}{(z-1)} = \frac{z/(1+a)}{(z-1)} - \frac{z/(1+a)}{z+a}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{1+a}\mu(k) - \frac{1}{1+a}(-a)^k\mu(k) = \frac{1}{(1+a)}(1-(-a)^k)\mu(k)$$

$$y(k) = \frac{1}{(1+a)}(1-(-a)^k)\mu(k) \tag{4.4}$$

La expresión (4.4) muestra que la respuesta del sistema dependerá del valor de a. Este hecho se constata en la figura 4.1, que muestra las gráficas de $y(k)$ para distintos valores de a.

Al cambiar el valor de a también cambia el valor del único polo de la función de transferencia (4.3), que es $-a$. Para cualquier valor real positivo de a el polo es un real negativo $-a$, y viceversa. Cuando el polo es negativo, la respuesta del sistema es de signo alternante (P.ej. $(-1/2)^k = 0, -1/2, 1/4, -1/8, \cdots$); por el contrario, si el polo es positivo la respuesta siempre será del mismo signo.

Por otra parte, si el valor absoluto de a es mayor que 1, el valor absoluto de la respuesta tiende a infinito, y se dice que el sistema es *inestable*. La figura 4.6 muestra cuáles son las *regiones de estabilidad e inestabilidad* con referencia a la recta real, es decir, en qué lugares debe estar ubicado el polo de la función de transferencia para que el sistema sea, respectivamente, estable o inestable; también se muestra en la misma figura cuando la respuesta es alternante o no.

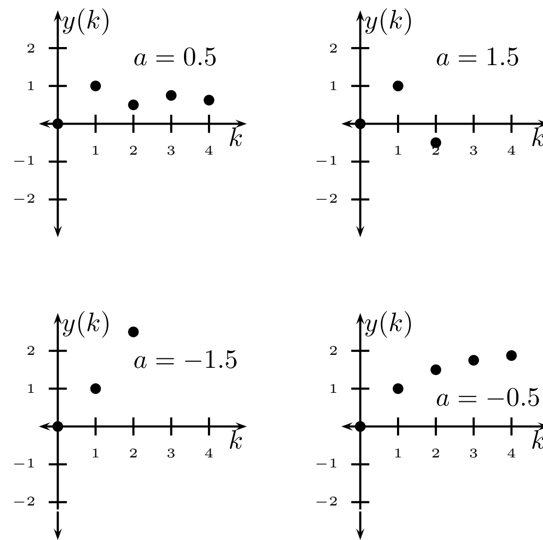


FIGURA 4.5: Respuesta al paso de un sistema discreto de primer orden

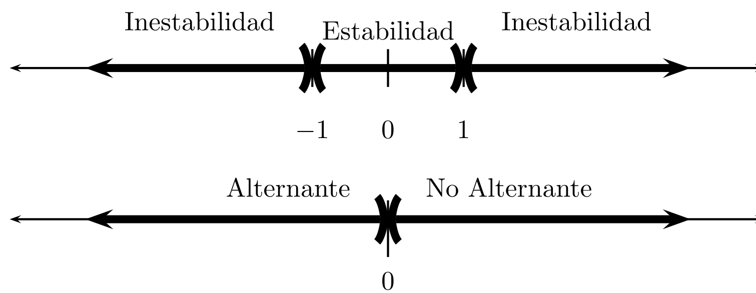


FIGURA 4.6: Regiones de estabilidad e inestabilidad para un sistema discreto de primer orden

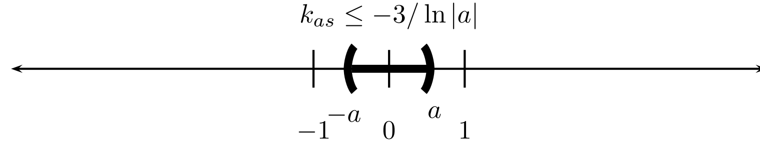


Figura 4.7: Regiones de tiempo de asentamiento máximo para un sistema discreto de primer orden

Para medir qué tan rápido decae una respuesta natural en los sistemas estables podemos definir el *tiempo de asentamiento* o *tiempo de estabilización*, como el tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera un porcentaje de su valor máximo, por ejemplo el 5 %. Para el caso del sistema discreto de primer orden, este tiempo será el menor entero k_{as} tal que:

$$(|-a|)^{k_{as}} \leq 0.05$$

En consecuencia, k_{as} satisface

$$k_{as} \leq \frac{\ln 0.05}{\ln(|a|)} \qquad k_{as} \leq -3/\ln(|a|)$$

En general, al alejar el polo del origen (al acercarlo a 1 ó -1) aumenta el tiempo de asentamiento, es decir, la respuesta es más lenta. Esto nos permite definir una *región de tiempo de asentamiento máximo*, como la que se muestra en la figura 4.7. Si el polo de la función de transferencia (4.3) cae en esa región podemos asegurar que su tiempo de asentamiento satisface $k_{as} \leq 3/\ln(|a|)$.

Al igual que en el caso continuo, en el caso discreto la región de tiempo de asentamiento máximo está contenida dentro de la región de estabilidad.

4.3. Sistemas continuos de segundo orden

Supóngase un sistema continuo de segundo orden, cuya función de transferencia sea

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.5}$$

Los polos de la función de transferencia serán:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

En caso de que $|\xi| < 1$, el radical es negativo, y los polos resultan ser complejos conjugados:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

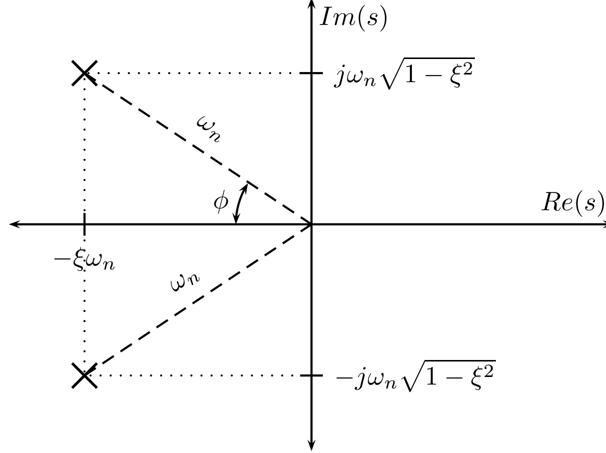


FIGURA 4.8: Ubicación de los polos de un sistema continuo de segundo orden, con polos complejos

La figura 4.8 muestra la ubicación de los polos complejos. Nótese que la distancia de los polos al origen (la magnitud del complejo) es justamente ω_n:

$$d = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n$$

Además, el coseno del ángulo ϕ formado con el semieje real negativo, es justamente ξ:

$$\cos\phi = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi$$

Al estimular el sistema (4.5) con un paso unitario $\mu(t)$, con condiciones iniciales nulas, la respuesta $y(t)$ puede calcularse como sigue:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right)\right)\mu(t) \quad (4.6)$$

donde,

$$\phi = \cos^{-1}\xi$$

Las figuras 4.9 a 4.11 muestran la gráfica de (4.6) en varias condiciones: en la figura 4.9 se ha fijado $\omega_n = 1$, y se ha variado ξ. En la figura 4.10 se ha fijado $\xi = 0.5$ y se ha variado ω_n. La figura 4.11 muestra la forma genérica de (4.6) con $\xi \in (0,1)$.

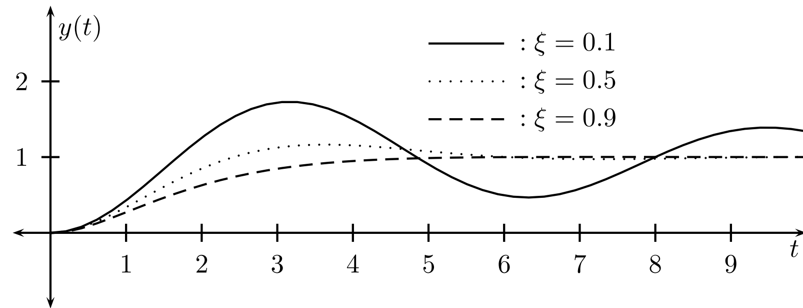


FIGURA 4.9: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, $w_n = 1$

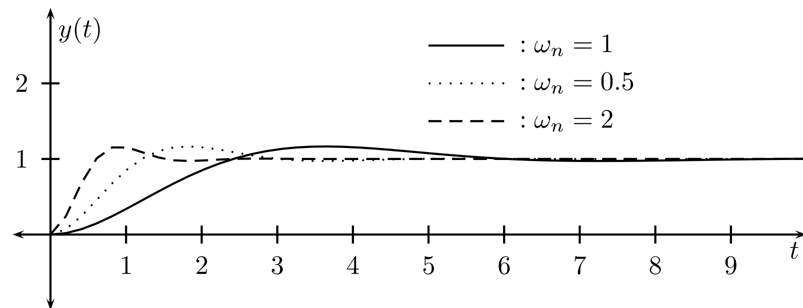


FIGURA 4.10: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, $\xi = 0.5$

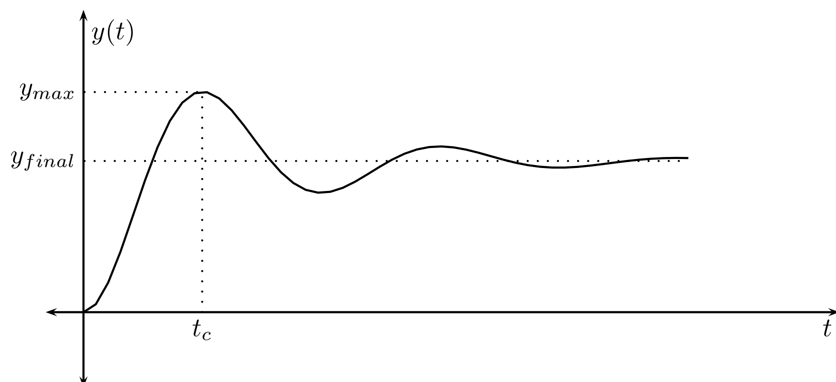


FIGURA 4.11: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden

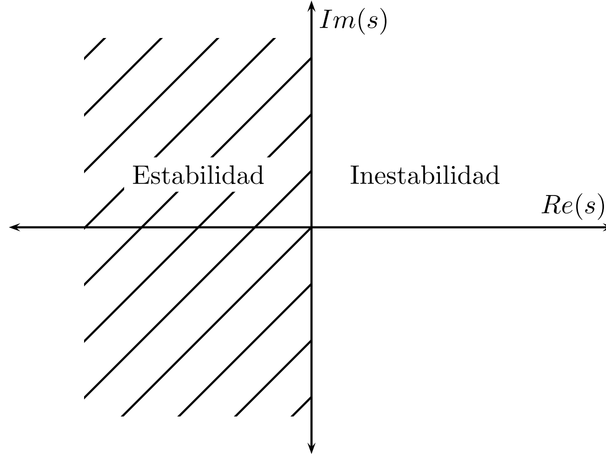


FIGURA 4.12: Región de estabilidad para un sistema continuo de segundo orden

4.3.1. Región de estabilidad

Al evaluar (4.6) se observa que para valores positivos de $-\xi\omega_n$ el término exponencial crece indefinidamente, y por tanto la respuesta se hará infinita. El término $-\xi\omega_n$ coincide con la parte real de los polos de (4.5), tal como se muestra en la figura 4.8, por lo tanto, la *región de estabilidad*, aquella en la que deben ubicarse los polos para que el sistema sea estable, resulta ser el semiplano izquierdo. Esto se muestra en la figura 4.12.

4.3.2. Región de tiempo máximo de asentamiento

La respuesta transitoria de (4.5) es el producto de una exponencial $e^{-\xi\omega_n t}$ por una sinusoidal sin $\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right)$, es decir, su amplitud es menor o igual que $e^{-\xi\omega_n t}$.

Si tomamos el *tiempo de asentamiento* como el tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera el 5 % de su valor máximo, en el caso del sistema continuo de segundo orden este tiempo t_{as} satisface:

$$e^{-\xi\omega_n t_{as}} = 0.05 \qquad t_{\xi\omega_n s} = -\frac{\ln 0.05}{\xi\omega_n} \qquad t_{as} \approx 3/\xi\omega_n$$

Debido a que $-\xi\omega_n$ es la parte real de los polos de (4.5) , tal como se muestra en la figura 4.8, la región de tiempo de asentamiento máximo es la que se muestra en la figura 4.13.

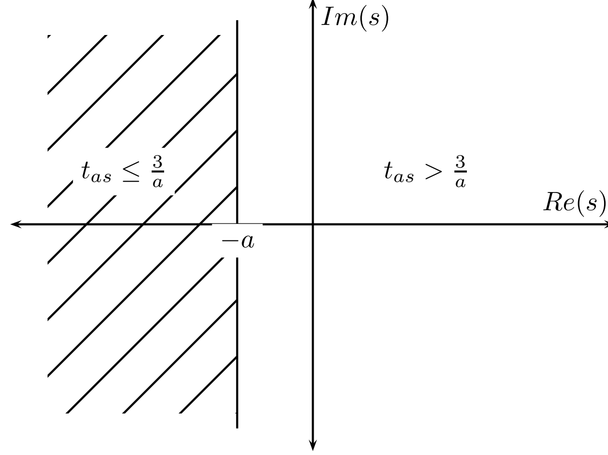


FIGURA 4.13: Región de tiempo máximo de asentamiento para un sistema continuo de segundo orden

4.3.3. Región de frecuencia máxima de oscilación

La frecuencia de oscilación de la respuesta es la frecuencia de la sinusoidal de (4.5), es decir es $\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, que corresponde a la parte imaginaria de los polos de (4.5) (ver figura 4.8). Por esta razón, la región de frecuencia máxima de oscilación es la que se muestra en la figura 4.14.

4.3.4. Región de sobrepico máximo

Uno de los parámetros más importantes de la respuesta graficada en la figura 4.11, es el *sobrepico máximo*, *sp*, que indica qué tanto llega a valer la respuesta en relación con su valor final:

$$sp = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} * 100\,\%$$

donde y_{max} es el valor máximo, y y_{final} el valor final (estacionario) de $y(t)$.

Para calcular el sobrepico máximo, primero derivamos $y(t)$ e igualamos a cero para obtener los instantes t_c en los que suceden los máximos y mínimos de $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \quad & \frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right)+\right] \\ & \left[\omega_n\sqrt{1-\xi^2}e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right)\right] \qquad = 0 \end{aligned}$$

$$\xi\omega_n \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right)$$

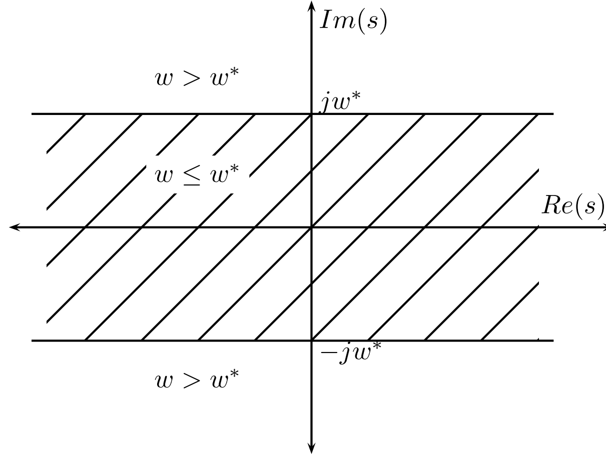


FIGURA 4.14: Región de frecuencia máxima de oscilación para un sistema continuo de segundo orden

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right)$$

$$\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Para obtener el valor de la arcotangente en la ecuación anterior, obsérvese en la figura (4.8) el valor de $\tan\phi$:

$$\tan\phi = \frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

La función $\tan^{-1}(x)$ es periódica, de periodo π, por lo tanto

$$\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \phi + n\pi$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Existen infinitos instantes en los que la derivada de $y(t)$ es nula, que corresponden a los máximos y mínimos locales que se observan en la figura 4.11. Para $n = 0$ resulta $t = 0$, por lo tanto la respuesta $y(t)$ es prácticamente horizontal en su inicio. El sobrepico máximo sucede en t_c, que corresponde a $n = 1$:

$$t_c = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

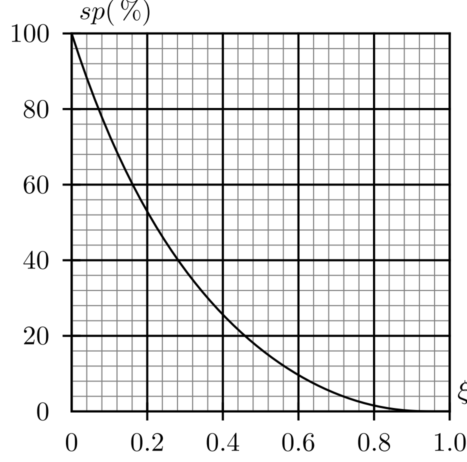


FIGURA 4.15: Sobrepico en función de ξ

El valor de $y(t)$ en t_c es el valor máximo de $y(t)$, es decir $y_{max} = y(t_c)$

$$y_{max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \phi\right)$$

$$y_{max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\pi + \phi)$$

Dado que $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, podemos escribir

$$y_{max} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\phi)$$

$$y_{max} = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + e^{-\pi\cot\phi}$$

El valor final de $y(t)$ es 1, por lo tanto

$$sp = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100\,\% = e^{-\pi\cot\phi} 100\,\%$$

Las figuras 4.15 y 4.16 muestran cómo varía el sobrepico máximo en función de el factor de amortiguamiento ξ y el ángulo ϕ, respectivamente. Es interesante observar que el sobrepico depende del ángulo ϕ que forman los polos con el semieje real negativo (figura 4.8), lo que nos permite establecer una *región de sobrepico máximo*, tal como la que se muestra en la figura 4.17.

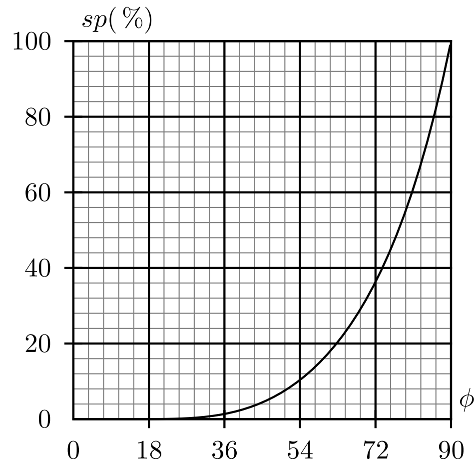


FIGURA 4.16: Sobrepico en función de ϕ

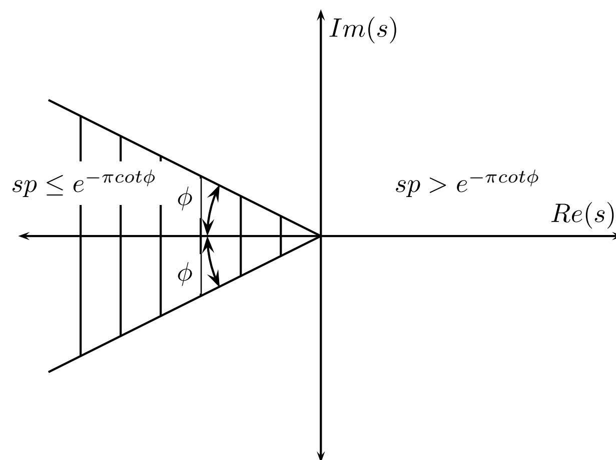


FIGURA 4.17: Región de sobrepico máximo para un sistema continuo de segundo orden

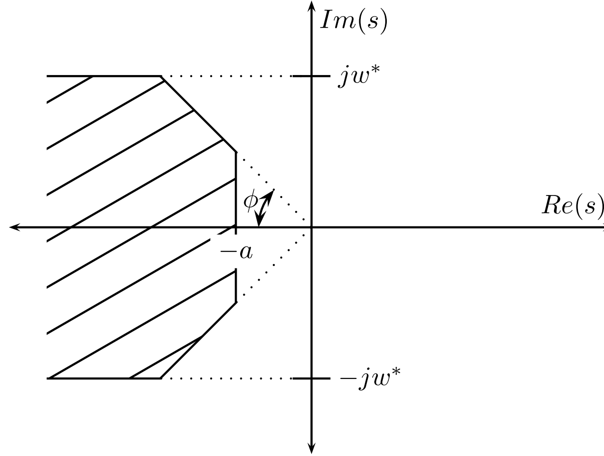


FIGURA 4.18: Región de diseño para un sistema continuo de segundo orden

4.3.5. Región de diseño

Las regiones que se muestran en las figuras 4.12, 4.13, 4.14 y 4.17 pueden resumirse en una única *región de diseño*, como la que se muestra en la figura 4.18. Refiriéndonos a esta figura, la región de diseño puede interpretarse así:

Dado un sistema de segundo orden como el de la ecuación (4.5) con condiciones iniciales nulas, cuyos polos están ubicados dentro de la *región de diseño*, puede asegurarse que:

- el sistema es estable
- el tiempo de asentamiento es menor o igual que $3/a$
- la frecuencia máxima de oscilación de la respuesta natural es w^*
- al estimularlo con un escalón unitario el sobrepico máximo es menor que $e^{-\pi \cot \phi} 100\,\%$

4.4. Sistemas discretos de segundo orden

Supóngase ahora un sistema discreto de segundo orden, cuya función de transferencia sea

$$F(z) = \frac{1 - 2b\cos a + b^2}{z^2 - 2bz\cos a + b^2} \tag{4.7}$$

Los polos de la función de transferencia serán:

$$p_{1,2} = \frac{2b\cos a \pm \sqrt{4b^2\cos^2 a - 4b^2}}{2} = b\left(\cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - 1}\right)$$

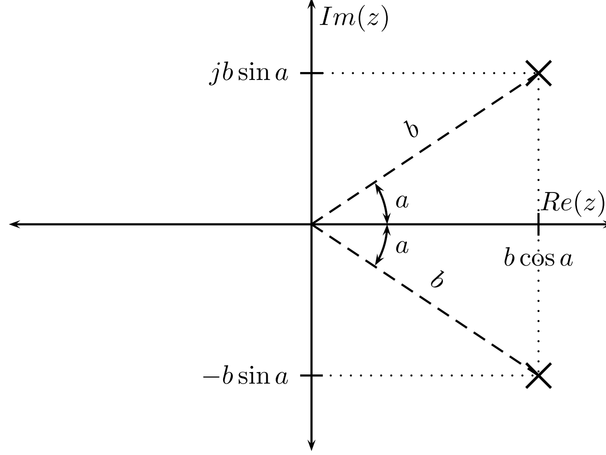


FIGURA 4.19: Ubicación de los polos de un sistema discreto de segundo orden, con polos complejos

El término del radical será menor o igual que cero; en caso de que sea menor, los dos polos serán los complejos conjugados:

$$p_{1,2} = b\left(\cos a \pm j\sqrt{1-\cos^2 a}\right) = b\left(\cos a \pm j\sin a\right)$$

La figura 4.19 muestra la ubicación de los polos en el plano complejo.

Al estimular el sistema (4.7) con un paso unitario $\mu(k)$, con condiciones iniciales nulas, la respuesta $y(k)$ puede calcularse como sigue:

$$Y(z) = F(z)U(z) = \left(\frac{1-2b\cos a+b^2}{z^2-2bz\cos a+b^2}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-2bz\cos a+b^2}$$

sumando e igualando coeficientes se obtiene

$$A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = -1+2b\cos a$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z^2+(1-2bz\cos a)}{z^2-2bz\cos a+b^2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z^2-bz\cos a}{z^2-2bz\cos a+b^2} - \frac{z(1-2z\cos a)}{z^2-2bz\cos a+b^2}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left(1 - b^k\cos ak - \frac{(1-b\cos a)}{b\sin a}b^k\sin ak\right)\mu(k)$$

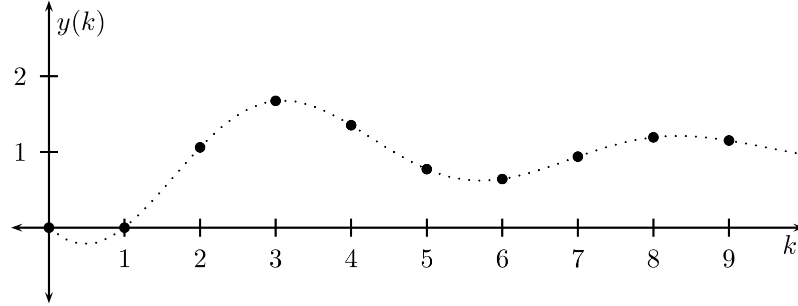


FIGURA 4.20: Respuesta al paso de un sistema discreto de segundo orden, $a = 1.2$, $b = 0.8$

Finalmente, las dos sinusoidales se pueden agrupar en una sola, para obtener:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left(1 - Cb^k \sin(ak + \phi)\right)\mu(k) \tag{4.8}$$

donde

$$C = \frac{\sqrt{1 + b^2 - 2b\cos a}}{b\sin a} = \frac{1}{\sin\phi} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b\sin a}{1 - b\cos a}\right)$$

La figura 4.20 muestra la gráfica de $y(k)$ para unos valores específicos de a y b. Aunque $y(k)$ sólo tiene sentido en los valores enteros de k, se ha trazado también en punteado la curva que se obtendría para valores reales de k.

Podría plantearse que para estudiar la secuencia $y(k)$ (los puntos en la figura 4.20) sería válido analizar el sistema continuo que la genera ((la curva punteada en la figura 4.20)); sin embargo, en ocasiones los resultados pueden ser muy engañosos: considérese el caso en que $a = 3$ y $b = 0.7$, que se grafica en la figura 4.21; si se analiza la curva continua, se concluye que el máximo valor (absoluto) de $y(k)$ será cercano a 14, pero al ver la secuencia de puntos observamos que ésta nunca supera (en valor absoluto) a 4.

No obstante, dado que un análisis de la curva continua arrojará valores mayores o iguales que la secuencia, puede utilizarse para establecer cotas superiores de los valores de la secuencia, y así establecer regiones de diseño.

4.4.1. Región de estabilidad

Al evaluar (4.8) se observa que para valores de b mayores que 1 el término exponencial crece indefinidamente, y por tanto la respuesta se hará infinita. El término b coincide con la magnitud de los polos de (4.7), tal como se muestra en la figura 4.19, por lo tanto, la *región de estabilidad*, aquella en la que deben ubicarse los polos para que el sistema sea estable resulta ser el círculo unitario centrado en el origen, tal como se ve en la figura 4.22.

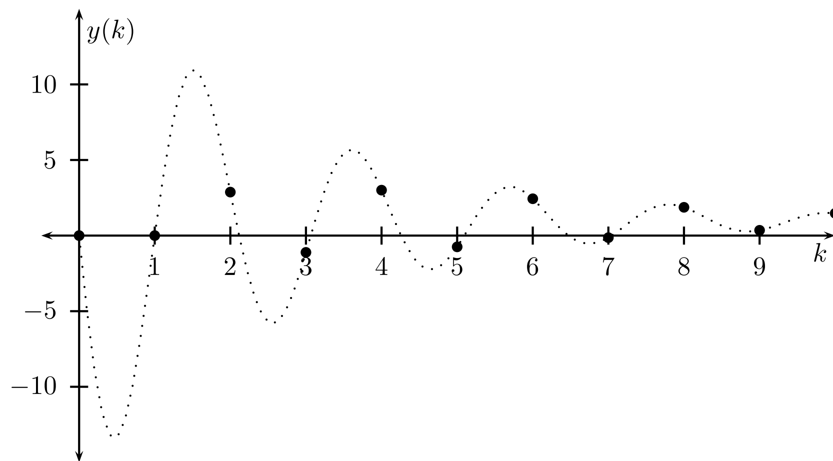


FIGURA 4.21: Respuesta al paso de un sistema discreto de segundo orden, $a = 3$, $b = 0.7$

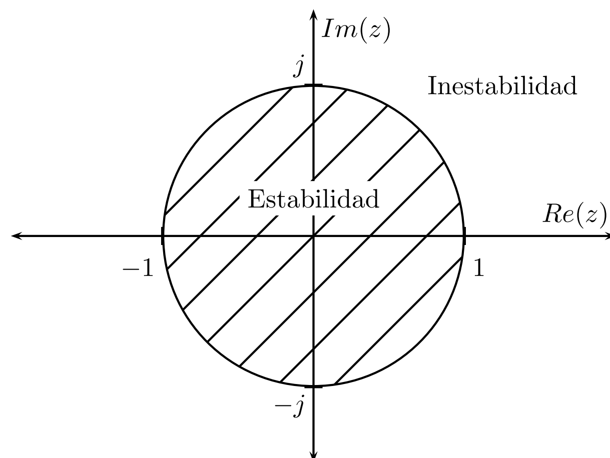


FIGURA 4.22: Región de estabilidad para un sistema discreto de segundo orden

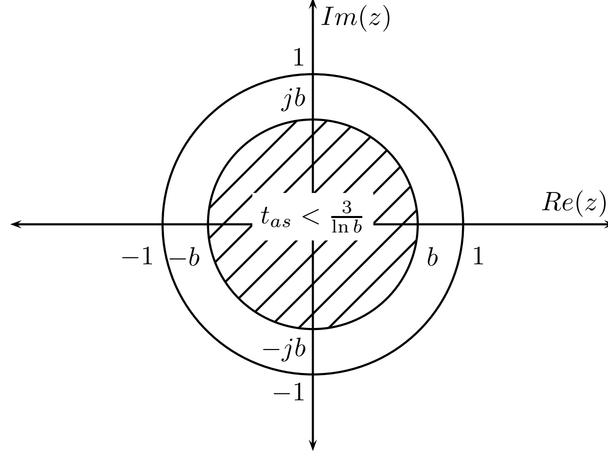


FIGURA 4.23: Región de tiempo de asentamiento máximo para un sistema discreto de segundo orden

4.4.2. Región de tiempo máximo de asentamiento

La respuesta transitoria de (4.7) es el producto de la exponencial b^k por la sinusoide $\sin(ak+\phi)$, es decir, su amplitud es menor o igual que b^k.

Si tomamos el *tiempo de asentamiento* como el tiempo a partir del cual la respuesta natural (su valor absoluto) no supera el 5 % de su valor máximo en el caso del sistema discreto de segundo orden, este tiempo k_{as} satisface:

$$b^{k_{as}} \leq 0.05 \qquad \ln b^{k_{as}} \leq \ln 0.05 \qquad k_{as} \ln b \leq \ln 0.05 \qquad k_{as} \leq \frac{3}{\ln b}$$

Debido a que b es la magnitud de los polos de (4.7) , tal como se muestra en la figura 4.19, la región de tiempo de asentamiento máximo es la que se muestra en la figura 4.23.

4.4.3. Región de frecuencia máxima de oscilación

La frecuencia de oscilación de la respuesta es la frecuencia de la sinusoidal de (4.7), es decir es a, que corresponde al ángulo de los polos de (4.7) respecto a la horizontal (ver figura 4.19). Por esta razón, la región de frecuencia máxima de oscilación es la que se muestra en la figura 4.24.

4.4.4. Región de sobrepico máximo

Al comparar las respuestas a escalones unitarios de los sistemas continuos y discretos de segundo orden, que aparecen en las ecuaciones (4.6) y (4.8) respectivamente, podemos ver las semejanzas de estas respuestas.

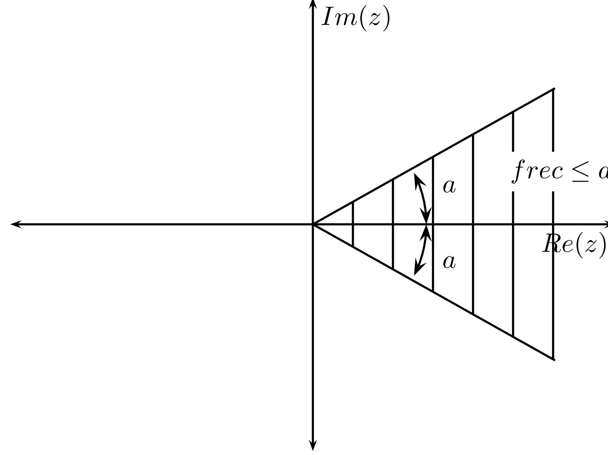


FIGURA 4.24: Región de frecuencia máxima de oscilación para un sistema discreto de segundo orden

Si reescribimos b^k como $\left(e^{\ln b}\right)^k = e^{k \ln b}$, podemos asimilar los coeficientes de los exponentes y las sinusoides:

$$-\xi\omega_n = \ln b \qquad \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = a$$

De tal manera que

$$\frac{\ln b}{a} = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\cot\phi$$

$$b = e^{-a\cot\phi} = e^{-\frac{a\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{4.9}$$

La ecuación 4.9 permite definir, para el caso discreto, curvas análogas a las que generan la región de sobrepico máximo de los sistemas continuos (figura 4.17). La figura 4.25 muestra las curvas generadas por la ecuación (4.9) para distintos valores de ξ.

Por su parte, la figura 4.26 muestra la región definida por (4.9) al fijar un valor de ξ (o de ϕ), es decir, al establecer un factor de amortiguamiento. Esta región no es la región de sobrepico máximo, sino la *región de amortiguamiento mínimo*. El sobrepico máximo es más difícil de obtener debido a que el tiempo es discreto.

4.4.5. Región de diseño

Al combinar las regiones definidas en las figuras 4.22 a 4.26 se obtiene la *región de diseño* que se muestra en la figura 4.27. Su significado es análogo a la región de diseño del caso continuo.

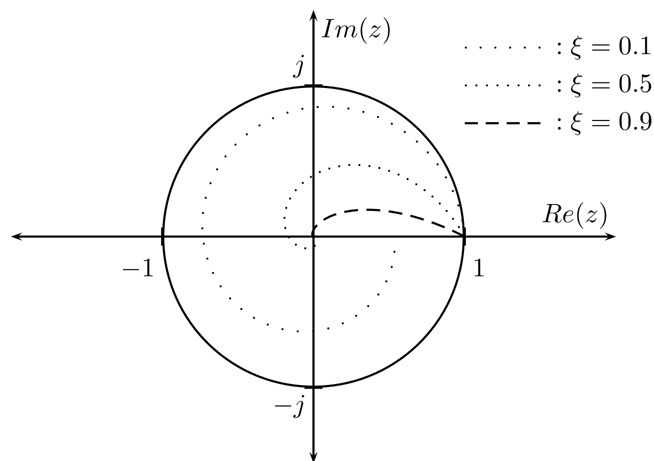


FIGURA 4.25: Curvas de amortiguamiento fijo para un sistema discreto de segundo orden

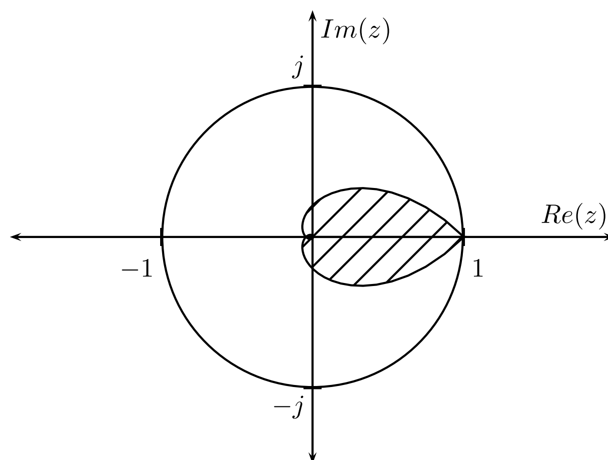


FIGURA 4.26: Región de amortiguamiento mínimo para un sistema discreto de segundo orden

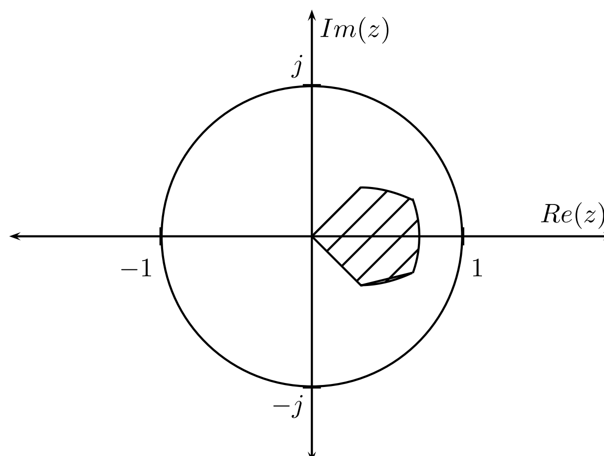


FIGURA 4.27: Región de diseño para un sistema discreto de segundo orden

4.5. Efecto de los ceros. Sistemas de fase mínima

Pese a que en las secciones anteriores se ha hecho énfasis en el efecto que tiene sobre la respuesta natural la ubicación de los polos en el plano, no debe desconocerse que los ceros también influyen en la respuesta.

Supóngase un sistema continuo de segundo orden, con un cero real:

$$F(s) = \frac{\frac{(b^2+\omega^2)}{a}(s+a)}{(s+b)^2+\omega^2} \tag{4.10}$$

La respuesta al escalón del sistema definido por (4.10) es :

$$y(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{a}\sqrt{(b^2+\omega^2)[(a-b)^2+\omega^2]}e^{-bt}\sin(\omega t + \phi)\right)\mu(t) \\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{w}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{w}{a-b}\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

La figura 4.28 muestra la gráfica de (4.11), para tres valores distintos de a, con unos valores fijos de $b = 1$ y $\omega = 1$; es decir, lo que se está modificando es la posición del cero de la función de transferencia. Allí puede verse que la ubicación del cero afecta directamente la forma de la respuesta.

Es importante resaltar que las regiones de diseño de las figuras 4.18 y 4.27 fueron desarrolladas para sistemas *prototipo* de segundo orden, sin ceros. Estas regiones pueden emplearse para el análisis y control de sistemas de segundo orden con ceros, pero sólo como una guía de carácter general.

Más importante aún es resaltar que para ceros en el semiplano derecho (este es el caso $a = -1$ en la figura 4.28) la respuesta al escalón presenta en sus

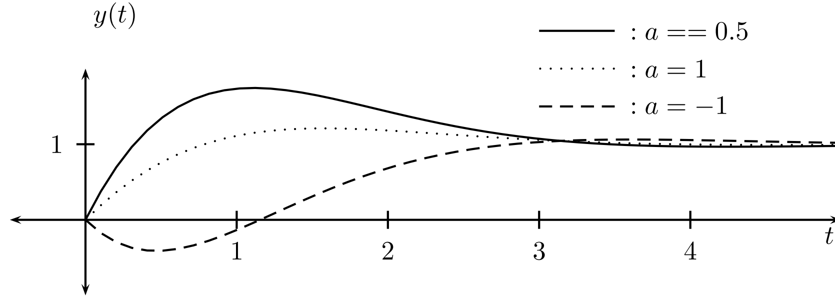


FIGURA 4.28: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, con cero real $b = \omega = 1$

inicios valores de signo contrario a los de la respuesta de estado estacionario; este fenómeno, conocido como *subpico* (en inglés *undershoot*) puede llegar a ser muy peligroso en algunos sistemas físicos, y constituye una gran dificultad para su control.

Los sistemas que no poseen ceros en el semiplano derecho, se conocen como sistemas de *fase mínima*, o simplemente *minifase* [2].

La presencia de subpicos ante una entrada escalón es fácil de demostrar para un sistema de segundo orden con polos reales y un cero real[3], tal como

$$F(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} \tag{4.12}$$

La respuesta al escalón será:

$$Y(s) = \frac{(s+a)}{s(s+b)(s+c)} \frac{a/(b+c)}{s} + \frac{(a-b)/(c-b)(-b)}{(s+b)} + \frac{(a-c)/(c-b)(c)}{(s+c)}$$

$$y(t) = \left(\frac{a}{bc} + \frac{(a-b)}{(c-b)(-b)} e^{-bt} + \frac{(a-c)}{(c-b)(c)} e^{-ct} \right) \mu(t)$$

El signo de la derivada de $y(t)$ evaluada en $t = 0$ nos indica si la respuesta crece o decrece en ese momento:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{a-c}{c-b} = \frac{c-b}{c-b} = 1$$

La derivada siempre es positiva, por lo tanto, para valores cercanos a $t = 0$, $y(t)$ será siempre positiva. Por otra parte, la respuesta de estado estacionario

[2] Esta denominación está relacionada con la respuesta de frecuencia del sistema.

[3] Para otro tipo de sistemas la demostración es más complicada, y se omite aquí.

de $y(t)$ será a/bc; para sistemas estables, tanto b como c son positivos, y por lo tanto el signo de la respuesta estacionaria es el mismo signo de a.

En conclusión, para valores negativos de a (ceros positivos), la respuesta en sus inicios tendrá un signo diferente al de la respuesta de estado estacionario y sucederá el subpico.

4.6. Polos dominantes

Supongamos ahora un sistema continuo de orden superior a 2, como por ejemplo uno cuya función de transferencia sea

$$F(s) = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{(s+10)(s+15)(s^2+2s+5)}$$

Al estimular ese sistema con un escalón unitario la respuesta será

$$Y(s) = F(s)\frac{1}{s} = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{s(s+10)(s+15)(s^2+2s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.25}{(s+10)} - \frac{0.25}{(s+15)} - -\frac{0.5(s+1)}{(s^2+2s+5)}$$

$$y(t) = \left(1 - 0.25e^{-10t} - 0.25e^{-15t} - 0.5e^{-t}\cos 2t\right)\mu(t) \tag{4.13}$$

La figura 4.29(a) muestra la gráfica de $y(t)$, mientras que la figura 4.29(b) muestra por separado los tres componentes de la respuesta natural, $-0.25e^{-10t}$, $-0.25e^{-15t}$ y $-0.5e^{-t}\cos 2t$.

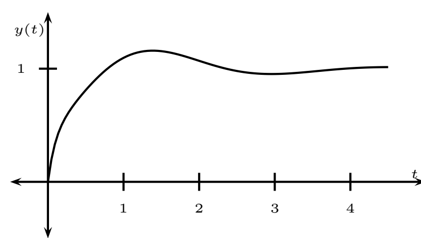
En la figura 4.29(b) se observa que el aporte a la respuesta natural debido a los polos $p_1 = -10$ y $p_2 = -15$ es considerablemente más pequeño que el debido a los polos $p_{3,4} = -1 \pm j2$. Lo anterior se debe a que los aportes de p_1 y p_2 decaen mucho más rápidamente que el aporte de $p_{3,4}$, ya que e^{-10t} y e^{-15t} decaen más rápidamente que e^{-t}.

Se dice entonces que los polos $p_{3,4}$ *dominan* el comportamiento del sistema, o simplemente que son los *polos dominantes*. La figura 4.29(c) compara la respuesta exacta $y(t)$ calculada según (4.13) y una respuesta aproximada $y_{aprox}(t)$ que se obtendría eliminando de $y(t)$ los aportes de los polos p_1 y p_2, es decir:

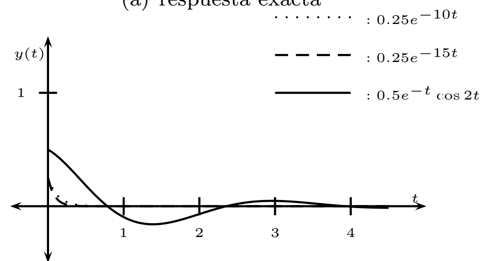
$$y(t) = \left(1 - 0.5e^{-t}\cos 2t\right)\mu(t)$$

Se observa cómo el aporte de los polos p_1 y p_2 sólo es significativo al comienzo de la respuesta, cuando la componente de la respuesta natural asociada a ellos aún no ha decaído, pero este aporte se desvanece rápidamente, y la respuesta aproximada resulta ser prácticamente la misma respuesta exacta.

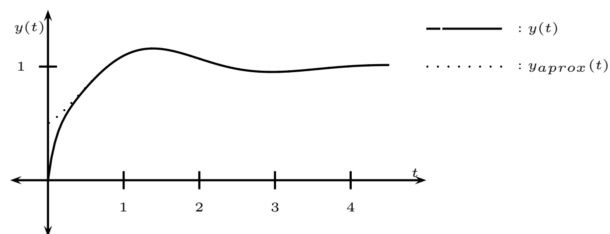
En conclusión, se dice que un sistema continuo estable tiene (1 ó 2) *polos dominantes* si la parte real de dichos polos es suficientemente mayor (está más hacia la derecha, en el semiplano izquierdo) que la de los demás polos del



(a) respuesta exacta



(b) componentes de la respuesta natural



(c) respuesta exacta y aproximada

Figura 4.29: Sistema continuo de orden 4 con polos dominantes

sistema, como para que el aporte de estos últimos se desvanezca mucho antes de que haya desaparecido el aporte debido a los polos dominantes.

En estos casos, las regiones de diseño, que fueron desarrolladas para sistemas de segundo orden, pueden ser una herramienta muy útil para analizar el sistema, aunque éste sea de un orden superior.

Algo análogo sucede con los sistemas discretos, sólo que aquí el tiempo de decaimiento no depende de la parte real de los polos, sino de su distancia al origen.

En conclusión, se dice que un sistema discreto estable tiene (1 ó 2) *polos dominantes* si la magnitud de dichos polos es suficientemente mayor (está más lejos del origen, dentro del círculo unitario) que la de los demás polos del sistema, como para que el aporte de estos últimos se desvanezca mucho antes de que haya desaparecido el aporte debido a los polos dominantes.

Capítulo 5

Sistemas realimentados simples

En este capítulo centramos nuestro interés en sistemas continuos y discretos como los que se muestran en las figuras 5.1 y 5.2, respectivamente. Este tipo de sistemas se denominan *realimentados* o *retroalimentados*, debido a que la señal de salida Y es retornada para ser comparada con la entrada U mediante una resta. El resultado de esta comparación es la señal de *error* E.

Esta es una estructura típica de control; G es la *planta* que se quiere controlar, y U el comportamiento que se necesita que tenga G. Y es el comportamiento real de G, que es medido y comparado con U a través de H. Si el comportamiento real difiere del deseado, existirá un error E, que se amplifica por K como entrada directa a G.

Definimos la *función de transferencia del sistema realimentado* como la relación entre la salida y la entrada con condiciones iniciales nulas. En el caso continuo será:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \tag{5.1}$$

y en el discreto:

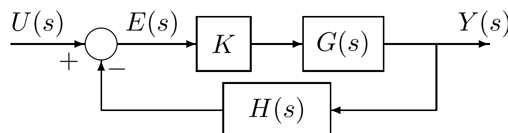


FIGURA 5.1: Sistema continuo retroalimentado simple

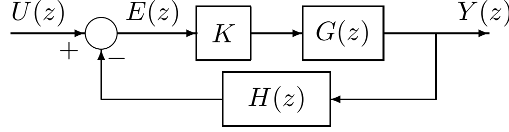


Figura 5.2: Sistema discreto retroalimentado simple

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)H(z)} \tag{5.2}$$

También se define la *función de transferencia del error* o *transmitancia del error* como la relación entre el error y la entrada. En el caso continuo:

$$F_E(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)H(s)} \tag{5.3}$$

y en el discreto:

$$F_E(z) = \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + KG(z)H(z)} \tag{5.4}$$

Además, a los productos $G(s)H(s)$ y $G(z)H(z)$ se les denomina *ganancia de lazo abierto*.

Si escribimos G y H como dos fracciones de polinomios N_G/D_G y N_H/D_H respectivamente, las expresiones (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) se convierten en:

- Función de transferencia del sistema realimentado, caso continuo:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + K\frac{N_G(s)}{D_G(s)}\frac{N_H(s)}{D_H(s)}} = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)} \tag{5.5}$$

- Función de transferencia del sistema realimentado, caso discreto:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K\frac{N_G(z)}{D_G(z)}}{1 + K\frac{N_G(z)}{D_G(z)}\frac{N_H(z)}{D_H(z)}} = \frac{KN_G(z)D_H(z)}{D_G(z)D_H(z) + KN_G(z)N_H(z)} \tag{5.6}$$

- Función de transferencia del error, caso continuo:

$$F_E(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + K\frac{N_G(s)}{D_G(s)}\frac{N_H(s)}{D_H(s)}} = \frac{D_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)} \tag{5.7}$$

- Función de transferencia del error, caso discreto:

$$F_E(z) = \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + K\frac{N_G(z)}{D_G(z)}\frac{N_H(z)}{D_H(z)}} = \frac{D_G(z)D_H(z)}{D_G(z)D_H(z) + KN_G(z)N_H(z)} \tag{5.8}$$

5.1. Tipo de sistema y error de estado estacionario

5.1.1. Caso continuo

Uno de los objetivos de los esquemas de control como el que se muestra en la figura 5.1 suele ser el asegurar que la señal de error sea nula, al menos después de que las respuestas transitorias hayan desaparecido. Por ese hecho, se estudia la *respuesta de estado estacionario* de la señal de error, comúnmente denominada el *error de estado estacionario*.

Bajo la suposición de que el sistema realimentado es estable[1], se puede argumentar que después de un cierto tiempo la respuesta transitoria se habrá hecho lo suficientemente pequeña como para considerar que no existe, y por lo tanto sólo queda la respuesta estacionaria, es decir

$$e_{ee} = \lim_{t\to\infty} e(t) \tag{5.9}$$

donde e_{ee} es el error de estado estacionario, y $e(t)$ es la señal de error en el dominio del tiempo, es decir $e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(s)\}$

El *teorema de valor final* de la transformada de Laplace provee una forma de calcular e_{ee}:

$$e_{ee} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\{sE(s)\} \tag{5.10}$$

Combinando (5.10) con (5.3) se obtiene:

$$e_{ee} = \lim_{s\to 0}\{sF_E(s)U(s)\} \tag{5.11}$$

Al observar (5.11), se encuentra que el error de estado estacionario podrá ser 0, ∞ o un valor finito, dependiendo del número de polos y ceros en $s = 0$ que tengan $F_E(s)$ y $U(s)$, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1 Sea $F_E(s) = \frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}$ y $U(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$. Según (5.11) el error de estado estacionario será

$$e_{ee} = \lim_{s\to 0}\left\{s\frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\} = 0\frac{(0+4)}{(0+3)(0+5)}\frac{1}{(0^2+4)} = 0$$

[1] La determinación de la estabilidad de los sistemas realimentados continuos se estudia en la sección 5.2.

Tipo de sistema	$u(t)=\mu(t)$ $U(s)=1/s$	$u(t)=t\mu(t)$ $U(s)=1/s^2$	$u(t)=t^2\mu(t)/2$ $U(s)=1/s^3$	$\cdots$
0	$\lim_{s\to 0}\{F_E(s)\}$	∞	∞	$\cdots$
1	0	$\lim_{s\to 0}\left\{\frac{F_E(s)}{s}\right\}$	∞	$\cdots$
2	0	0	$\lim_{s\to 0}\left\{\frac{F_E(s)}{s^2}\right\}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

TABLA 5.1: Error de estado estacionario para sistemas continuos

Ejemplo 5.2 Sea $F_E(s)=\frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}$ y $U(s)=\frac{1}{s}$. Según (5.11) el error de estado estacionario será

$$e_{ee}=\lim_{s\to 0}\left\{s\frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}\frac{1}{s}\right\}=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}\right\}=\frac{(0+4)}{(0+3)(0+5)}=\frac{4}{15}$$

Ejemplo 5.3 Sea $F_E(s)=\frac{s(s+4)}{(s+3)(s+5)}$ y $U(s)=\frac{1}{s^3}$. Según (5.11) el error de estado estacionario será

$$e_{ee}=\lim_{s\to 0}\left\{s\frac{s(s+4)}{(s+3)(s+5)}\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$e_{ee}=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{(s+4)}{(s+3)(s+5)}\frac{1}{s}\right\}=\frac{(0+4)}{(0+3)(0+5)}\frac{1}{0}=\frac{4}{0}=\infty$$

En los ejemplos anteriores puede observarse que el valor de e_{ee} depende de si la s que aparece en (5.11) puede o no cancelarse con otros términos s que aparezcan en $F_E(s)U(s)$. Con esto en mente, definimos el *tipo de sistema* como el número de ceros en $s=0$ que tenga $F_E(s)$ y construímos la tabla 5.1. Nótese que las entradas $u(t)$ que se han empleado son aquellas cuyas transformadas de Laplace tienen términos s^n en el denominador.

De acuerdo con (5.7) los ceros de $F_E(s)$ son los valores de s que hacen que $D_G(s)D_H(s)$ sea cero, es decir son iguales a los polos de $G(s)H(s)$. Por esta razón también podemos definir el *tipo de sistema* como el número de polos en $s=0$ que tenga $G(s)H(s)$.

5.1.2. Caso discreto

Consideraciones similares pueden hacerse para el caso discreto. Si el sistema realimentado es estable[2], el error de estado estacionario de un sistema como el de la figura 5.2 será

$$e_{ee}=\lim_{k\to\infty}e(k) \tag{5.12}$$

[2]La determinación de la estabilidad de los sistemas realimentados discretos se estudia en la sección 5.3.

Tipo de sistema	$u(k)=\mu(k)$ $U(z)=z/(z-1)$	$u(k)=k\mu(k)$ $U(z)=z/(z-1)^2$	$u(k)=k^2\mu(k)$ $U(z)=z(z+1)/(z-1)^3$	$\cdots$ $\cdots$
0	$\text{lím}_{z\to 1}\{zF_E(z)\}$	∞	∞	$\cdots$
1	0	$\text{lím}_{z\to 1}\left\{\frac{z}{(z-1)}F_E(z)\right\}$	∞	$\cdots$
2	0	0	$\text{lím}_{z\to 1}\left\{\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}F_E(z)\right\}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabla 5.2: Error de estado estacionario para sistemas discretos

donde e_{ee} es el error de estado estacionario, y $e(k)$ es la señal de error en el dominio del tiempo, es decir $e(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{E(z)\}$

El *teorema de valor final* de la transformada $\mathcal{Z}$ provee una forma de calcular e_{ee}:

$$e_{ee}=\lim_{k\to\infty} e(k)=\lim_{z\to 1}\{(z-1)E(z)\} \tag{5.13}$$

o lo que es igual,

$$e_{ee}=\lim_{k\to\infty} e(k)=\lim_{z\to 1}\{(z-1)F_E(z)U(z)\} \tag{5.14}$$

Ahora el valor de e_{ee} depende del número de ceros y polos en $z=1$ que tengan $F_E(z)$ y $U(z)$. Por lo tanto, definimos *tipo de sistema* como el número de ceros en $z=1$ que tenga $F_E(z)$ y construímos la tabla 5.2. Nótese que las entradas $u(k)$ que se han empleado son aquellas cuyas transformadas de Laplace tienen términos $(z-1)^n$ en el denominador.

De acuerdo con (5.8), los ceros de $F_E(z)$ son los valores de z que hacen que $D_G(z)D_H(z)$ sea cero, es decir son iguales a los polos de $G(z)H(z)$. Por esta razón también podemos definir el *tipo de sistema* como el número de polos en $z=1$ que tenga $G(z)H(z)$.

5.2. Estabilidad y criterios de estabilidad en sistemas continuos

En este capítulo empleamos la definición de *estabilidad de entrada acotada - salida acotada*[3], también conocida como estabilidad BIBO por sus siglas en inglés (*Bounded Input - Bounded Output*).

[3]Existen varias definiciones de estabilidad de sistemas dinámicos; afortunadamente para los sistemas lineales todas ellas son equivalentes y podemos adoptar indistintamente cualquiera de ellas.

Un sistema dinámico es BIBO estable si cualquier entrada acotada produce una salida acotada. En otras palabras, si ante entradas de valor finito la respuesta (su valor absoluto) no tiende a infinito.

La figura 2.3 muestra que las funciones continuas cuyos valores absolutos crecen indefinidamente, tienen sus polos en el semiplano derecho. Si una función de transferencia tiene uno de sus polos en esa zona, la respuesta natural tenderá a infinito, independientemente del valor de la entrada, y por tanto el sistema será inestable.

En consecuencia, para asegurar que un sistema dinámico lineal sea estable, todos los polos de su función de transferencia deben estar en el semiplano izquierdo. Basta con que un polo esté en el semiplano derecho para que el sistema sea inestable. Si existe un polo en el eje imaginario, es decir, en la frontera entre los semiplanos derecho e izquierdo, se dice que el sistema es marginalmente estable.

5.2.1. Arreglo y criterio de Routh-Hurwitz

Dado que la estabilidad de un sistema dinámico está determinada por la ubicación de los polos de su función de transferencia, es decir por la ubicación de las raíces de un cierto denominador, planteamos ahora el siguiente problema:

> *¿Cómo determinar si las raíces de un polinomio como (5.15) están ubicadas todas en el semiplano izquierdo?*

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{5.15}$$

Antes de contestar esta pregunta, hacemos notar lo siguiente:

- Si (5.15) tiene coeficientes de signos diferentes, o coeficientes cero, entonces tiene al menos una raíz en el semiplano derecho o en el eje imaginario.
- Si (5.15) tiene todos sus coeficientes del mismo signo, no podemos extraer conclusiones a priori sobre la ubicación de sus raíces.

Para demostrar lo anterior, supóngase primero que (5.15) tiene sólo raíces reales, y por tanto puede factorizarse así:

$$p(s) = A(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n) \tag{5.16}$$

Si las raíces α_i son todas negativas, los términos $-\alpha_i$ serán todos positivos, y en general el producto $(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ tendrá todos los coeficientes positivos. De esta forma, los coeficientes de (5.15) serán todos positivos o todos negativos, dependiendo del signo de A en (5.16). Por esta razón, si $p(s)$ tiene coeficientes de signos diferentes o cero, necesariamente al menos un término $-\alpha_i$ debe ser negativo, lo que implicaría que tendría al menos una raíz positiva (en el semiplano derecho).

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ s^{n-2} & & & & \\ \vdots & & & & \\ s^1 & & & & \\ s^0 & & & & \end{array}$$

FIGURA 5.3: Arreglo de Routh. Primeras dos líneas

Ahora supóngase que (5.15) tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$p(s) = A(s - (\delta + j\omega))(s - (\delta - j\omega))(s - \alpha_3) \cdots (s - \alpha_n) \tag{5.17}$$

El producto de los términos que tienen que ver con las raíces complejas es:

$$(s - (\delta + j\omega))(s - (\delta - j\omega)) = s^2 - 2\delta s + (\delta^2 + \omega^2) \tag{5.18}$$

Si $\delta < 0$, es decir si las raíces están en el semiplano izquierdo, (5.18) tendrá sólo coeficientes positivos, y por tanto (5.15) tendrá todos sus coeficentes del mismo signo (positivos si A es positiva y negativos si A es negativa).

Como consecuencia de lo anterior, si (5.15) tiene coeficientes de signos diferentes, o cero, podemos asegurar que tiene una o más raíces en el semiplano derecho o en el eje imaginario. Si por el contrario tiene todos los coeficientes de igual signo, es necesario realizar otro tipo de pruebas antes de establecer la ubicación de sus raíces. Una de esas pruebas se conoce como la prueba de *Routh-Hurwitz*, para lo cual es necesario primero construir un arreglo específico con los coeficientes de (5.15)

Construcción del arreglo de Routh

Dado un polinomio $p(s)$ como (5.15)

Es posible construir el *arreglo de Routh* de $p(s)$ a partir de los coeficientes a_i que aparecen en (5.15). Para ello, inicialmente construímos el arreglo que se muestra en la figura 5.3. A continuación, se completa el arreglo de Routh línea por línea, siguiendo las siguientes indicaciones.

- Cada nueva línea se construye con información de las dos líneas inmediatamente anteriores.
- Para calcular el término $j-$ésimo de una línea (c_j en la figura 5.4) se efectúa la operación

$$c_j = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_{j+1} \\ b_1 & b_{j+1} \end{vmatrix}}{b_1} \tag{5.19}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
\vdots & & & & \\
s^{i+2} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
s^{i+1} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{i} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

FIGURA 5.4: Arreglo de Routh. Dos líneas genéricas

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 16 \\
s^4 & 1 & 9 & 10 \\
s^3 & c_1 & c_2 & c_3 \\
s^2 & d_1 & d_2 & d_3 \\
s^1 & e_1 & e_2 & e_3 \\
s^0 & f_1 & f_2 & f_3
\end{array}$$

FIGURA 5.5: Arreglo de Routh del ejemplo 5.4. Primeras dos líneas

Ejemplo 5.4 Considere el polinomio

$$p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10 \tag{5.20}$$

La figura 5.5 muestra las dos primeras líneas del arreglo de Routh para (5.20) Los valores de la línea correspondiente a s^3 se calculan así:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{1} = -6 \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{1} = 6$$

No es necesario calcular c_3, porque ya no hay más columnas en las dos primeras líneas, y por lo tanto el resultado será 0.

Para la línea correspondiente a s^2 se tiene:

$$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}{-6} = 10 \qquad d_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = 10$$

Para la línea correspondiente a s^1:

$$e_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}}{10} = 12$$

Y para la línea correspondiente a s^0:

$$f_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}}{12} = 10$$

El resultado es el arreglo que se muestra en la figura 5.6

s^5	1	3	16
s^4	1	9	10
s^3	-6	6	
s^2	10	10	
s^1	12		
s^0	10		

FIGURA 5.6: Arreglo de Routh del ejemplo 5.4

Es conveniente resaltar algunos aspectos de la construcción del arreglo:

- El número de filas del arreglo disminuye progresivamente: cada dos filas se disminuye una columna.
- El término que está en la última columna justo antes de desaparecer ésta es siempre el mismo (es 10 en la figura 5.6), debido a que éste se calculará siempre como

$$-\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}}{c} = b$$

Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurtwiz puede expresarse así:

Criterio de Routh-Hurwitz
El número de raíces de (5.15) en el semiplano derecho es igual al número de cambios de signo que se suceden en la primera columna del arreglo de Routh de dicho polinomio.

Retomando el ejemplo 5.20, el polinomio (5.20) tiene dos raíces en el semiplano derecho, ya que su arreglo de Routh (figura 5.6) tiene dos cambios de signo en la primera columna: uno al pasar de 1 a -6, y otro al pasar de -6 a 10.

Miremos ahora el sistema realimentado de la figura 5.1. La función de transferencia, y por lo tanto sus polos, dependen de la variable K, como claramente se establece en (5.5). La utilización del criterio de Routh-Hurwitz permite establecer condiciones en la varible K para que el sistema realimentado sea estable. Esto podemos verlo mediante los ejemplos 5.5, 5.6 y 5.7:

Ejemplo 5.5 Supóngase que en el sistema de la figura 5.1 se tiene que

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \qquad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 3s + (K+2)}$$

s^2	1	$K+2$
s^1	3	
s^0	$K+2$	

FIGURA 5.7: Arreglo de Routh del ejemplo 5.5

s^3	1	11
s^2	6	$6+K$
s^1	$\frac{60-K}{6}$	
s^0	$6+K$	

FIGURA 5.8: Arreglo de Routh del ejemplo 5.6

El arreglo de Routh para el polinomio del denominador $s^2+3s+(k+2)$ se muestra en la figura 5.7.

Para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema sea estable, se necesita que todos los signos de la primera columna sean iguales, y por lo tanto:

$$K+2>0 \qquad K>-2$$

Podemos concluir que para cualquier valor de k superior a -2 el sistema será estable, y para cualquier valor menor que -2 será inestable. Justo cuando $k=-2$ el sistema tendrá estabilidad marginal.

Ejemplo 5.6 Supóngase que en el sistema de la figura 5.1 se tiene que

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s)=\frac{1}{s+3}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}=\frac{K(s+3)}{s^3+6s^2+11s+(6+K)} \tag{5.21}$$

El arreglo de Routh para el polinomio del denominador $s^3+6s^2+11s+(6+K)$ se muestra en la figura 5.8.

Para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema sea estable, se necesita que todos los signos de la primera columna sean iguales, y por lo tanto:

$$60-K>0 \qquad \text{y} \qquad 6+K>0$$

Podemos concluir que para cualquier valor de K en el intervalo $(-6,60)$ el sistema será estable, y para cualquier valor por fuera de ese intervalo será inestable. Justo cuando $K=-6$ o $K=60$ el sistema tendrá estabilidad marginal.

Ejemplo 5.7 Supóngase que existe un sistema dinámico continuo cuya función de transferencia tiene el siguiente denominador

$$D_F(s)=s^3+3Ks^2+(K+2)s+4$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K+2 \\ s^2 & 3K & 4 \\ s^1 & \frac{3K^2+6K-4}{3K} & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

FIGURA 5.9: Arreglo de Routh del ejemplo 5.7

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 & 3 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

FIGURA 5.10: Arreglo de Routh con cero en la primera columna. Arreglo incompleto

El arreglo de Routh correspondiente se muestra en la figura 5.9.

Para que el sistema sea estable se necesita que todos los términos de la primera columna sean del mismo signo, por lo tanto deben cumplirse las siguientes dos condiciones

$$\begin{cases} 3K > 0 \\ \frac{3K^2+6K-4}{3K} > 0 \end{cases}$$

La segunda condición podría darse si tanto numerador como denominador son del mismo signo, sin embargo descartamos la opción de que ambos sean negativos, porque la primera condición impone que el denominador sea positivo, es decir las dos condiciones son:

$$\begin{cases} K > 0 \\ 3K^2+6K-4 > 0 \end{cases}$$

La segunda condición se cumple si $K < -2.52$ o $K > 0.52$. De estas dos posibilidades descartamos la primera, debido a que K debe ser positivo. Por lo tanto, aseguramos que el sistema sea estable si y sólo si $K > 0.52$

Problemas en la construcción del arreglo de Routh

Debido a que los términos del arreglo de Routh se calculan como está indicado en (5.19), surge una dificultad cuando en la primera columna aparece un cero, pues para calcular los términos de las columnas siguientes será necesario dividir por cero. Tal es el caso del polinomio

$$p(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$$

cuyo arreglo de Routh se muestra (parcialmente) en la figura 5.10.

Para calcular los términos de la siguiente columna sería necesario dividir por cero. Una estrategia para obviar este problema consiste en remplazar 0 por ε, completar el arreglo, y luego analizar el límite cuando ε tiende a cero por la

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	ε	3	
s^1	$2-\frac{3}{\varepsilon}$		
s^0	3		

FIGURA 5.11: Arreglo de Routh con cero en la primera columna. Aproximación

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	0^+	3	
s^1	$-\infty$		
s^0	3		

FIGURA 5.12: Arreglo de Routh con cero en la primera columna. Arreglo completo

derecha. En esas condiciones, el arreglo de Routh será como el que se muestra en la figura 5.11. Cuando $\varepsilon \to 0^+$, el arreglo resulta ser como el de la figura 5.12, y por lo tanto el polinomio tiene dos raíces en el semiplano derecho.

Una dificultad mayor surge cuando todos los términos de una fila se hacen cero. Este hecho se conoce como la *terminación prematura del arreglo*, y está relacionada con polinomios cuyas raíces están ubicadas en forma simétrica respecto al origen, como por ejemplo cuando existen raíces en el eje imaginario. Tal es el caso del polinomio

$$p(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$$

cuyo arreglo de Routh se muestra (parcialmente) en la figura 5.13.

La estrategia a emplear en este caso consiste en escribir el polinomio $\hat{p}(s)$ que se obtiene con los coeficientes de la fila inmediatemente superior a la que quedó con ceros; el orden del primer monomio está dado por el término a la izquierda de la línea vertical (s^4 en el ejemplo) y el de los demás monomios se decrementa en dos:

$$\hat{p}(s) = s^4 + 5s^2 + 4$$

Este polinomio resulta ser un divisor exacto de $p(s)$ (puede comprobarse que $p(s) = \hat{p}(s)(s+1)$). El arreglo de Routh lo continuamos reemplazando la fila

s^5	1	5	4
s^4	1	5	4
s^3	0	0	
s^2			
s^1			
s^0			

FIGURA 5.13: Arreglo de Routh con terminación prematura. Arreglo incompleto

s^5	1	5	4
s^4	1	5	4
s^3	4	10	
s^2	2.5	4	
s^1	3.6		
s^0	4		

FIGURA 5.14: Arreglo de Routh con terminación prematura. Arreglo completo

de ceros por una fila con los coeficientes de la derivada de $\hat{p}(s)$:

$$\frac{d\hat{p}(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

El arreglo resultante se muestra en la figura 5.14

5.2.2. Lugar geométrico de las raíces

De acuerdo con la ecuación (5.5) los polos de la función de transferencia de un sistema como el de la figura 5.1 dependen del valor de K. El *lugar geométrico de las raíces*, o simplemente *root-locus* es el gráfico en el plano s de la ubicación de los polos de (5.5) conforme K varía de cero a infinito ($K : 0 \to \infty$).

Se define también el *root-locus complementario* como el gráfico en el plano s de la ubicación de los polos de (5.5) conforme K varía de menos infinito a cero ($K : -\infty \to 0$)

Ejemplo 5.8 Supóngase que en el sistema de la figura 5.1 los bloques $G(s)$ y $H(s)$ son:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

De tal manera que la función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(s) = \frac{K(s+3)}{s^2 + 4s + (3+K)} \tag{5.22}$$

Los polos de 5.22 estarán dados por

$$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3+K)}}{2} = -2 \pm \sqrt{1-K} \tag{5.23}$$

La tabla 5.3 muestra el valor de $p_{1,2}$ para diversos valores positivos de K, según (5.23). La figura 5.15 muestra cómo varía la ubicación de los polos de (5.22): en rojo se muestra qué sucede al variar K de 0 a ∞ es decir, lo que corresponde al *root-locus*; en azul se muestra el efecto de variar K de menos infinito a cero, lo que corresponde al *root-locus* complementario.

K	p_1	p_2
-8	-5	1
-3	-4	0
0	-3	-1
0.75	-2.5	-1.5
1	-2	-2
2	$-2+j$	$-2-j$
5	$-2+2j$	$-2-2j$

TABLA 5.3: Polos de la función de transferencia del ejemplo 5.8

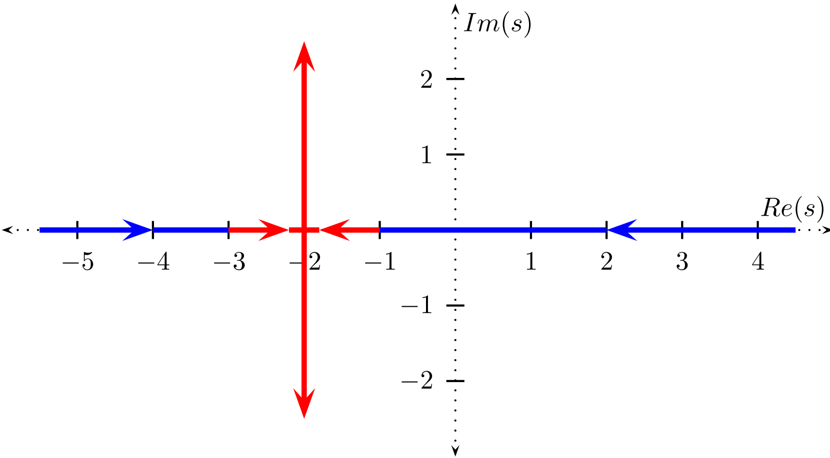


FIGURA 5.15: *Root-locus* (en rojo) y *root-locus* complementario (en azul) del ejemplo 5.8

Determinación de la estabilidad

Si nos referimos a la ecuación (5.5), encontramos que la condición para los polos de $F(s)$ será

$$D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s) = 0$$

$$\frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} = -\frac{1}{K} \qquad G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \tag{5.24}$$

Es importante hacer notar que la condición expresada en (5.24) está dada en términos de la *ganancia de lazo abierto* $G(s)H(s)$ en lugar de la función de transferencia del sistema realimentado (5.5). Dado que $G(s)$ es un complejo, (5.24) puede escribirse en términos de su magnitud y ángulo:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|} \qquad \arg[G(s)H(s)] = \begin{cases} \pm 180^o & K > 0 \\ 0^o & K < 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

De acuerdo con (5.25), si un valor s_0 forma parte del *root-locus*, entonces $\arg[G(s_0)H(s_0)] = \pm 180^o$; además, podemos saber cuál es el valor de K que hace que la rama del *root-locus* pase justamente por s_0, pues $|K| = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$; como K es positiva (estamos suponiendo que s_0 está en el *root-locus*) entonces $K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$.

Si por el contrario, s_0 forma parte del *root-locus* complementario, entonces. $\arg[G(s_0)H(s_0)] = 0^o$; el valor de K que hace que la rama del *root-locus* pase justamente por s_0, será tal que $|K| = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$; como K es negativa (estamos suponiendo que s_0 está en el *root-locus* complementario) entonces $K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|}$.

Ejemplo 5.9 Si tomamos el ejemplo de la figura 5.15, podemos conocer cuál es el valor de K que hace que la rama del *root-locus* complementario que viene desde ∞ llegue a 0. Este valor será justamente:

$$K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} = -\frac{1}{\frac{1}{(0+1)(0+3)}} = -3$$

De esta manera, podemos concluir que para valores de K menores que -3 siempre habrá un polo en el semiplano derecho, y por lo tanto el sistema será inestable. Para valores K mayores que -3 todas las ramas del *root-locus* están en el semiplano izquierdo, y por lo tanto el sistema será estable.

Ejemplo 5.10 Supóngase que en la figura 5.1 los valores de $G(s)$ y $H(s)$ son:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)} \tag{5.26}$$

La figura 5.16 muestra los diagramas de *root-locus* y *root-locus* complementario para (5.26). Nótese como una rama del *root locus* complementario (en azul) viene

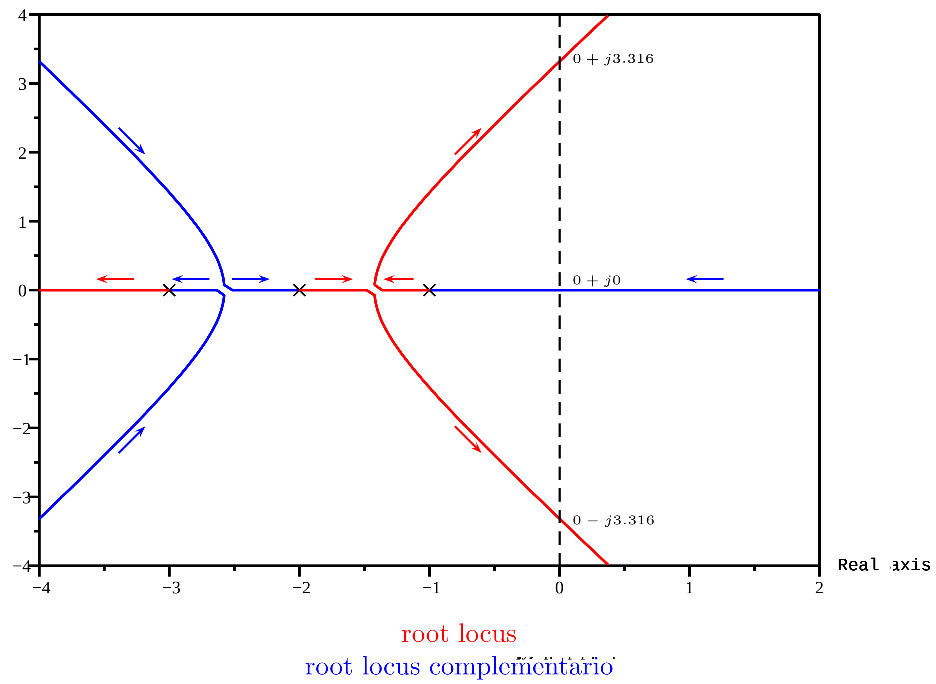


Figura 5.16: Diagramas de *root-locus* para el ejemplo 5.10

desde $+\infty$ por el eje real, y pasa del semiplano derecho al semiplano izquierdo. Esto significa que para valores de K muy negativos el sistema realimentado tiene un polo en el semiplano derecho y por lo tanto es inestable.

Sin embargo, conforme K aumenta y se acerca a 0 el polo que origina la inestabilidad se desplaza a la izquierda, y en algún momento pasa al semiplano izquierdo y por lo tanto el sistema realimentado deja de ser inestable. Para determinar cuál es el valor de K en el que sucede esta transición, observamos que la rama cruza el eje imaginario justo en $s = 0 + j0$. De acuerdo con 5.25 tenemos:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{|K|} = \frac{1}{|(0 + j0 + 1)(0 + j0 + 2)(0 + j0 + 3)|} = \frac{1}{6} \qquad (5.27)$$

$$|K| = 6 \qquad (5.28)$$

La ecuación (5.28) establece cuál es el valor absoluto de K que hace que la rama del *root-locus* complementario pase del semiplano derecho al izquierdo. Como sabemos que se trata de valores negativos de K podemos establecer que para $K < -6$ el sistema realimentado es inestable, mientras que para $-6 < K \leq 0$ es estable.

Si observamos ahora el diagrama de *root-locus* (en rojo) observamos que existen dos ramas (simétricas respecto al eje horizontal) que nacen en el semiplano izquierdo y pasan al semiplano derecho. Esto significa que para valores pequeños de K el sistema realimentado es estable, pero a partir de algún valor positivo de K se torna inestable.

Las dos ramas cruzan el eje imaginario simultaneamente, así que para determinar el momento en el que sucede la transición basta con estudiar una de ellas. Tomemos por ejemplo la rama superior, que cruza el eje imaginario en $0 + j3.316$. El valor de K en el que esto sucede puede determinarse empleando 5.25:

$$\frac{1}{|K|} = \frac{1}{|(0 + j3.316 + 1)(0 + j3.316 + 2)(0 + j3.316 + 3)|} = \frac{1}{60} \qquad (5.29)$$

$$|K| = 60 \qquad (5.30)$$

Según la ecuación (5.30) para $0 \leq K < 60$ el sistema retroalimentado es estable, y para $K > 60$ es inestable.

Combinando esta información con la que se obtuvo al analizar el *root-locus* complementario puede concluirse que el sistema realimentado es estable si y sólo si $K \in (-6, 60)$

Reglas de construcción de los diagramas

La figura 5.15 ha sido construida a partir de la expresión exacta de la ubicación de los polos, dada por (5.23). No obstante, podría haberse empleado un método diferente, ya que existen varias *reglas constructivas*, que permiten

	Regla	*root-locus*	*root-locus* complementario
R_1 :	número de ramas	n	n
R_2 :	Inicio de las ramas	Polos de $G(s)H(s)$ (o en ∞)	Ceros de $G(s)H(s)$ (o en ∞)
R_3 :	Fin de las ramas	Ceros de $G(s)H(s)$ (o en ∞)	Polos de $G(s)H(s)$ (o en ∞)
R_4 :	Intervalos del eje real	A la izquierda de un número impar de polos y ceros de $G(s)H(s)$	A la izquierda de un número par de polos y ceros de $G(s)H(s)$
R_5 :	Número de ramas que van hacia (o vienen desde) ∞	$\lvert n-m\rvert$	$\lvert n-m\rvert$
R_6 :	Ángulos de las rectas asíntotas	$\theta_i = \frac{2i+1}{\lvert n-m\rvert}180^o \quad i = 0,1,\cdots,\lvert n-m\rvert$	$\theta_i = \frac{2i}{\lvert n-m\rvert}180^o \quad i = 0,1,\cdots,\lvert n-m\rvert$
R_7 :	Centroide de las rectas asíntotas	$\sigma = \frac{\sum^n \text{polos de } G(s)H(s) - \sum^m \text{ceros de } G(s)H(s)}{\lvert n-m\rvert}$	

Tabla 5.5: Reglas de construcción para el *root-locus* y el *root-locus* complementario

trazar manualmente el *root-locus* y el *root-locus* complementario de funciones de transferencia de orden superior, con un alto grado de precisión.

Estas reglas constructivas, algunas de las cuales se han resumido en la tabla 5.5[4], se basan en la ecuación (5.5). En el ejemplo 5.11 se muestra cómo se emplean estas reglas.

Ejemplo 5.11 Trazar el *root-locus* y el *root-locus* complementario de

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

Para trazar el diagrama de *root-locus*, comenzamos por ubicar en el plano complejo los polos y ceros de $G(s)H(s)$ (figura 5.17(a)). De acuerdo con la Regla R_4, podemos definir cuáles intervalos del eje real forman parte del *root-locus* y cuáles del *root-locus* complementario (figura 5.17(b)). Las reglas R_2 y R_3 nos permiten determinar si las ramas del eje real llegan o salen de los ceros y polos de $G(s)H(s)$ (figura 5.17(c))

Según la regla R_5, deberán existir $4-1=3$ ramas que van al infinito en el *root-locus*, y otras 3 ramas que vienen desde el infinito en el *root-locus* complementario.

[4] n = número de polos de $G(s)H(s)$; m = número de ceros de $G(s)H(s)$

Estas ramas serán asíntotas a unas rectas que cruzan el eje real en el centroide σ, que según la regla R_7 será:

$$\sigma = \frac{((0) + (-4) + (-1+j) + (-1-j) - (-1)}{4-1} = \frac{-5}{3}$$

Podemos calcular los ángulos de esas rectas siguiendo la regla R_6 (figura 5.17(d))

i	RL	RLC
0	$\theta_0 = \frac{2i+1}{4-1}180^\circ = 60^\circ$	$\theta_0 = \frac{2i}{4-1}180^\circ = 0^\circ$
1	$\theta_1 = \frac{2i+1}{4-1}180^\circ = 180^\circ$	$\theta_1 = \frac{2i}{4-1}180^\circ = 120^\circ$
2	$\theta_2 = \frac{2i+1}{4-1}180^\circ = 300^\circ$	$\theta_2 = \frac{2i}{4-1}180^\circ = 240^\circ$

Con esta información podríamos trazar parte de las ramas que van o vienen al infinito (figura 5.17(e)), pero sería necesario emplear otras reglas, o programas de simulación, para obtener los diagramas completos (figura 5.17(f))

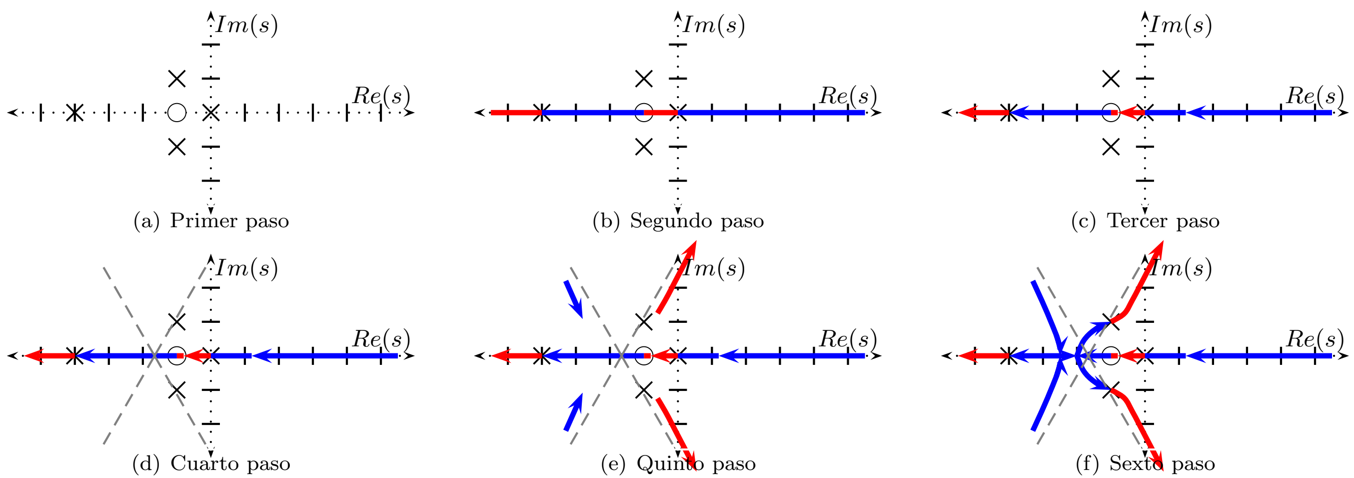


FIGURA 5.17: *Root-locus* (en rojo) y *root-locus* complementario (en azul) del ejemplo 5.11

5.2.3. Diagramas y criterio de Bode

El análisis del lugar geométrico de las raíces permite establecer la ubicación de los polos de un sistema como el de la figura 5.1 conforme cambia el valor de K. Si estamos interesados en estudiar la estabilidad del sistema, debemos analizar los puntos en los cuales las ramas del *root-locus* y el *root-locus* complementario cruzan el eje imaginario, pues es en ese punto en donde los polos pasan del semiplano izquierdo al derecho, o viceversa, y por lo tanto son los puntos en donde puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado.

Además, el *root-locus* es simétrico respecto al eje horizontal, por lo cual basta con estudiar en qué momento las ramas atraviesan una de las dos mitades del eje imaginario, generalmente la mitad positiva.

Este hecho sugiere otra posibilidad de estudiar la estabilidad de los sistemas realimentados: *en lugar de estudiar en dónde están ubicadas las ramas del root-locus en todo el plano complejo, centrar nuestra atención únicamente en el eje imaginario positivo, y detectar cuándo es atravesado por alguna rama del root-locus.*

Recordemos que de acuerdo con (5.25) los puntos del plano complejo que forman parte del *root-locus* son tales que al evaluar en ellos la función $G(s)H(s)$ el ángulo del número complejo resultante debe ser $\pm 180^o$ o 0°.

De acuerdo con lo anterior, los puntos en donde puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado coinciden con aquellos puntos $j\omega$ del eje imaginario en donde:

$$\arg\{G(j\omega)H(j\omega)\} = \begin{cases} \pm 180^o \\ 0^o \end{cases} \tag{5.31}$$

Para encontrar cuáles son los valores de ω que satisfacen (5.31) pueden trazarse los *diagramas de Bode*[5] de $G(s)H(s)$ y buscar gráficamente en el diagrama de fase cuáles son los puntos en donde el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ vale $\pm 180^o$ o 0°, tal como se muestra en la figura 5.18[6].

Para determinar los valores de K en los cuales la rama del *root-locus* atraviesa el eje imaginario, puede emplearse nuevamente (5.25):

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{|K|} \tag{5.32}$$

El valor de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ puede leerse (en decibeles) en el diagrama de Bode de magnitud, tal como se muestra en la figura 5.18. A partir de ese valor, y empleando (5.32) puede determinarse los valores de K para los cuales una rama del *root-locus* atraviesa el eje imaginario (K_c en la figura 5.18).

[5] ver apéndice B.

[6] Existe un método gráfico caído en desuso para calcular $F(j\omega)$ a partir de $G(j\omega)$ cuando $K = H(s) = 1$. Ese método se basa en las cartas de Nichols, presentadas en el apéndice C.

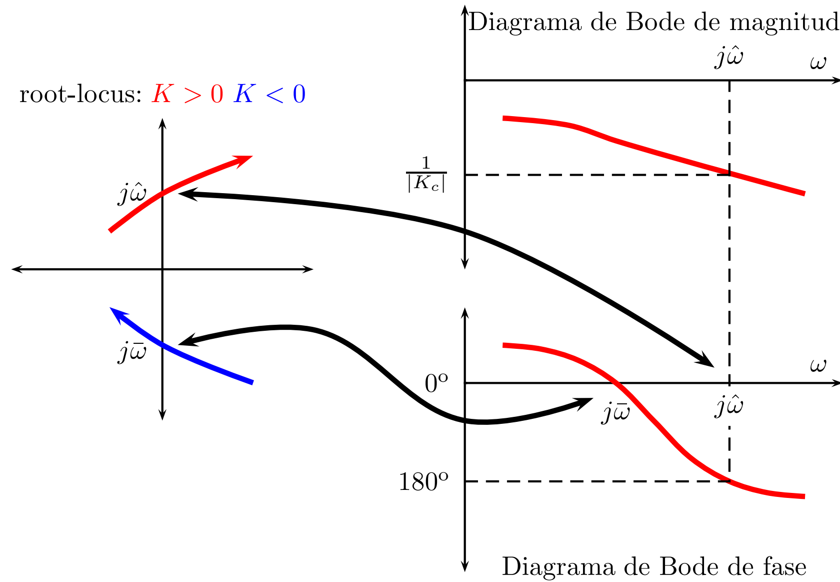


FIGURA 5.18: Relación entre el *root-locus* y los diagramas de Bode

Márgenes de estabilidad

Las ecuaciones (5.31) y (5.32) establecen dos condiciones que deben cumplir los puntos $j\omega$ del plano complejo para formar parte del *root-locus* o del *root-locus* complementario; una de las condiciones hace referencia a la *ganancia* de $G(s)H(s)$ y la otra a su *fase*. La idea de los *márgenes de estabilidad* consiste en suponer que $k = 1$, y explorar qué margen se tiene cuando se cumple una de esas condiciones:

Margen de ganancia: el margen de ganancia consiste en el menor valor por el que se debe amplificar la ganancia de $G(s)H(s)$ cuando se satisface la condición (5.31), para que simultáneamente se cumpla la condición (5.32).

Para el caso en que $K > 0$, el margen de ganancia puede leerse (en decibeles) en los diagramas de Bode como el valor negativo de la ganancia a la frecuencia en la que la fase es de $\pm 180^o$.

Para el caso en que $K < 0$, el margen de ganancia puede leerse (en decibeles) en los diagramas de Bode como el valor negativo de la ganancia a la frecuencia en la que la fase es de 0°.

Margen de fase: el margen de fase consiste en el menor valor que se le debe sumar al ángulo de $G(s)H(s)$ cuando se satisface la condición (5.32), para que simultáneamente se cumpla la condición (5.31)

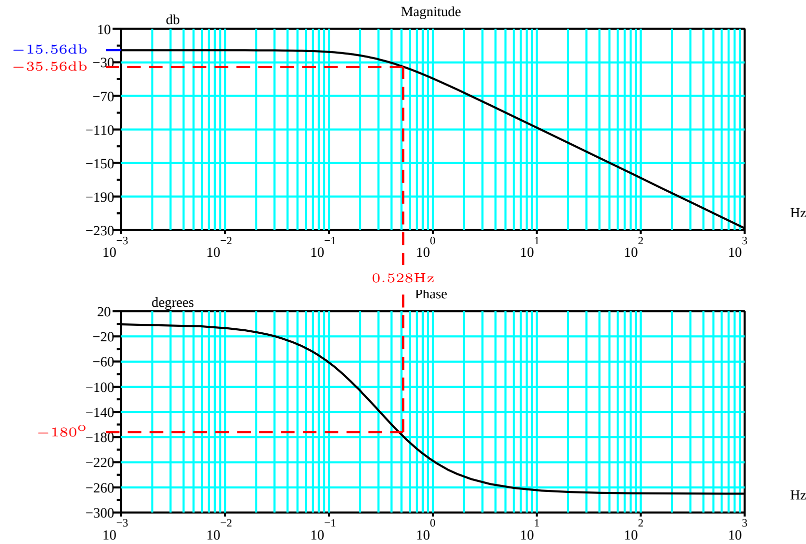


FIGURA 5.19: Diagramas de Bode para un ejemplo

Para el caso en que $K > 0$, el margen de fase puede leerse en los diagramas de Bode como $180^o - \phi$, donde ϕ es el ángulo correspondiente a la frecuencia en la que la ganancia es de $0db$.

Para el caso en que $K < 0$, el margen de fase puede leerse en los diagramas de Bode como $-\phi$, donde ϕ es el ángulo correspondiente a la frecuencia en la que la ganancia es de $0db$.

Ejemplo 5.12 Supóngase que en el sistema de la figura 5.1 los bloques $G(s)$ y $H(s)$ son:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)} \tag{5.33}$$

La figura 5.19 muestra los diagramas de Bode de $G(s)H(s)$. Según (5.31) los puntos en los cuales puede cambiar la estabilidad del sistema realimentado son aquellos en los que el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es 0° o es $\pm 180^o$.

Al observar la figura 5.19 notamos que el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es -180° para una frecuencia de 0.528Hz, es decir para $\omega = 2\pi 0.528 = 3.316 rad/s$. En esa frecuencia el valor de la magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es de -35.56db, lo que significa que la magnitud de K, en decibeles, para la cual una rama del *root-locus* atraviesa

el eje imaginario es tal que $\frac{1}{|K|_{\text{en db}}} = -35.56$, lo que equivale a:

$$\frac{1}{|K|} = 10^{\frac{|K|_{\text{en db}}}{20}} \qquad |K| = 10^{-\frac{|K|_{\text{en db}}}{20}} \qquad |K| = 10^{-\frac{-35.56}{20}} = 60$$

como $K > 0$ (hemos encontrado una rama del *root-locus*) entonces $K = 60$.

También debemos buscar los puntos para los cuales el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es 0°. En la figura 5.19 se observa que el diagrama de fase es asintótico a $0°$, es decir, que para $\omega = 0$ el ángulo de $G(j\omega)H(j\omega)$ es $0°$. El diagrama de magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es asintótico a -15.56db, lo que significa que la magnitud de K, en decibeles, para la cual una rama del *root-locus* complementario atraviesa el eje imaginario es tal que $\frac{1}{|K|_{\text{en db}}} = -15.56$, lo que equivale a:

$$\frac{1}{|K|} = 10^{\frac{|K|_{\text{en db}}}{20}} \qquad |K| = 10^{-\frac{|K|_{\text{en db}}}{20}} \qquad |K| = 10^{-\frac{-15.56}{20}} = 6$$

como $K < 0$ (hemos encontrado una rama del *root-locus* complementario) entonces $K = -6$.

Hemos encontrado los valores de K para los cuales un polo cruza el eje imaginario, y han resultado ser -6 y 60. Esto significa que al variar K desde $-\infty$ hasta ∞, la estabilidad del sistema realimentado sólo puede cambiar en -6 y 60. En consecuencia, podemos definir tres intervalos para K en los cuales la estabilidad es constante; para conocer la estabilidad de cada intervalo basta con determinar la de uno de sus puntos:

- $K \in (-\infty, -6)$: seleccionamos $K = -10$ de tal manera que el denominador de (5.21) se convierte en

  $$s^3 + 6s^2 + 11s - 4$$

  Como el denominador tiene coeficientes de signos diferentes al menos tiene una raíz en el semiplano derecho, y en consecuencia el sistema realimentado es inestable.

- $K \in (-6, 60)$: seleccionamos $K = 0$ de tal manera que el denominador de (5.21) se convierte en

  $$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s + 1)(s + 2)(s + 3)$$

  Las raíces del denominador son negativas (-1, -2 y -3) , y en consecuencia el sistema realimentado es estable.

- $K \in (60, \infty)$: seleccionamos $K = 100$ de tal manera que el denominador de (5.21) se convierte en

  $$s^3 + 6s^2 + 11s + 106$$

  cuyas raíces son -6.71 y $.36 \pm j3.96$, es decir que tiene dos raices en el semiplano derecho y en consecuencia el sistema realimentado es inestable.

5.2.4. Diagrama y criterio de Nyquist

Para poder presentar el criterio de Nyquist, es conveniente recordar antes el *principio del argumento*, que puede explicarse a partir de la metodología gráfica para calcular el valor de una función compleja racional.

Determinación gráfica del valor de una función compleja racional

Supóngase una función compleja $F(s)$ que puede escribirse como una razón de polinomios:

$$F(s) = \frac{a_0 + a_1 s^1 + \cdots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s^1 + \cdots + b_n s^n} \tag{5.34}$$

Al factorizar los polinomios, la ecuación (5.34) podrá escribirse como

$$F(s) = A\frac{(s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{5.35}$$

Si se quiere calcular el valor de $F(s)$ para un valor específico de s, digamos s_0, es decir, si se quiere calcular $F(s_0)$, basta con reemplazar s por s_0:

$$F(s_0) = A\frac{(s_0-c_1)(s_0-c_2)\cdots(s_0-c_m)}{(s_0-p_1)(s_0-p_2)\cdots(s_0-p_n)} \tag{5.36}$$

Cada uno de los paréntesis que aparecen en (5.36) puede determinarse de forma gráfica, tal como se explica a continuación: la figura 5.20 muestra el diagrama de polos y ceros de una función de transferencia $F(s)$ hipotética; en dicho diagrama se observa que el vector $(s_0 - c_1)$ corresponde al vector que va desde c_1 hasta s_0. La magnitud y el ángulo de dicho vector pueden medirse en la gráfica, y correspondería al primero de los paréntesis de (5.36).

De forma similar podría procederse con cada uno de los paréntesis de (5.36), de tal manera que una forma de calcular la magnitud y el ángulo de $F(s_0)$ sería:

$$|F(s_0)| = |A|\frac{\prod^m \text{Magnitudes de los vectores que van de ceros a } s_0}{\prod^n \text{Magnitudes de los vectores que van de polos a } s_0} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\arg F(s_0) = \quad & \arg A + \textstyle\sum^m \text{Ángulos de los vectores que van de ceros a } s_0 \\ & -\textstyle\sum^n \text{Ángulos de los vectores que van de polos a } s_0\end{aligned} \tag{5.38}$$

siendo $\arg A = 0^o$ si $A > 0$ o $\arg A = 180^o$ si $A < 0$

Principio del argumento

Para presentar el principio del argumento, supongamos inicialmente que la función $F(s)$ a que se refiere la ecuación (5.34) es

$$F(s) = s + 1 \tag{5.39}$$

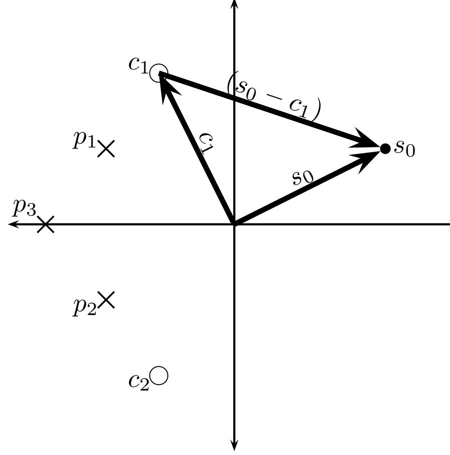


FIGURA 5.20: Determinación gráfica del valor de una función de transferencia racional

es decir, tiene un único cero en $s = -1$ y no tiene polos. Supongamos también que deseamos calcular $F(s_0)$, para $s_0 = 1 + j$.

La figura 5.21 muestra dos planos complejos: en el primero de ellos se ha dibujado el diagrama de polos y ceros de (5.39); este plano lo denominaremos *plano s*. En el segundo plano se ha dibujado el resultado de calcular $F(s_0)$, y por eso lo denominaremos *plano F*. Para obtener $F(s_0)$ y poder graficarlo en el plano F se ha empleado el método gráfico en el plano s, y el resultado se ha trasladado, tal como se señala en la figura 5.21.

Si ahora quisiéramos calcular $F(s)$ no en un único punto s_0 sino en todos los puntos de una trayectoria cerrada del plano s, podríamos repetir el procedimiento anterior en cada uno de los puntos de la trayectoria. Las figuras 5.22 y 5.23 muestran los resultados para dos trayectorias diferentes que se han recorrido en el sentido horario. En ambos casos se produce en el plano F otra trayectoria cerrada en sentido horario.

La principal diferencia entre las dos trayectorias seleccionadas es que la primera de ellas (figura 5.22) no encierra al cero de $F(s)$ mientras que la segunda (figura 5.22) sí lo hace. Como consecuencia de ésto, en el primer caso la trayectoria cerrada que aparece en el plano F no encierra al origen, mientras que en el segundo sí lo hace.

Las figuras 5.24 y 5.25 muestran cuál habría sido el resultado si $F(s)$ tuviera un polo en $s = -1$ en lugar de un cero, es decir si $F(s) = 1/(s+1)$. En el plano F aparecen trayectorias cerradas que sólo encierran al origen si la trayectoria del plano s encierra al polo. Sin embargo, debe resaltarse que el sentido de la trayectoria que encierra al origen es antihorario, lo que se explica observando que en la ecuación (5.38) el ángulo de los vectores que van de polos a s_0 tiene

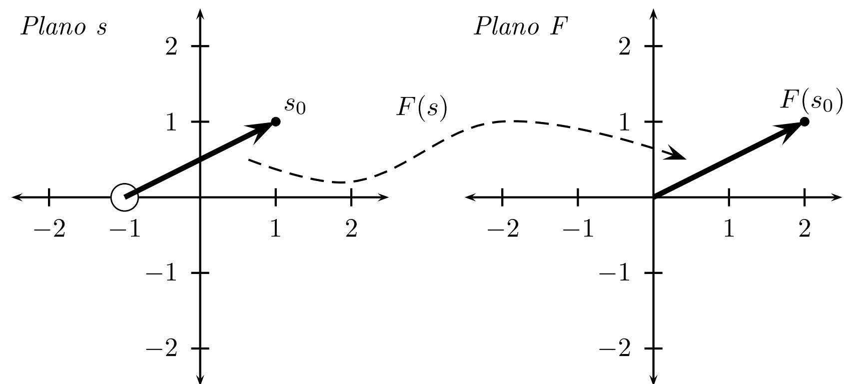


Figura 5.21: Plano s y Plano F

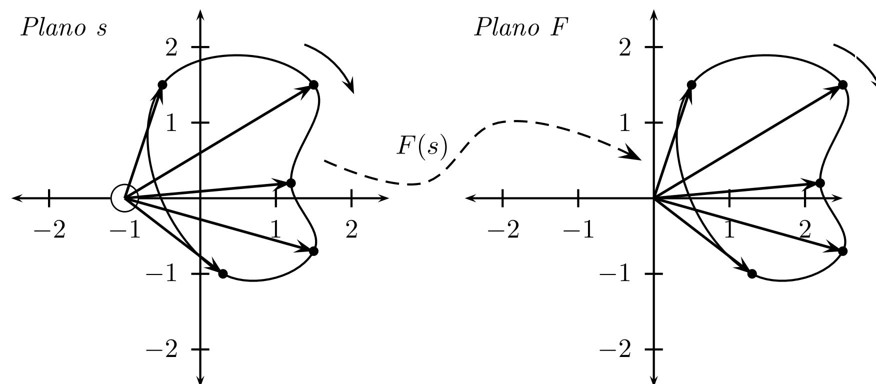


Figura 5.22: Plano s y Plano F en una trayectoria cerrada que no encierra el cero

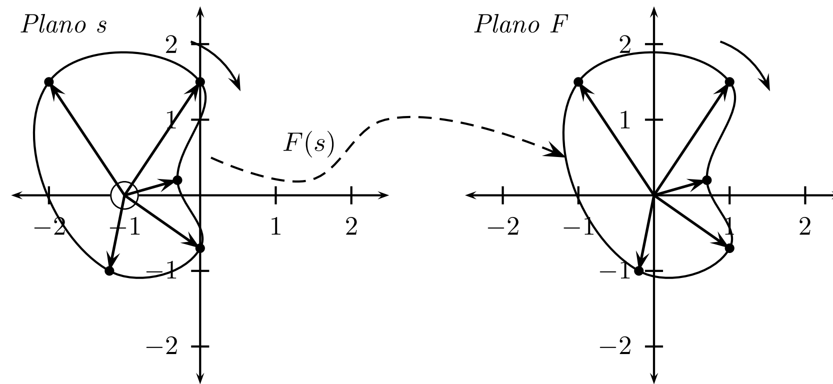


FIGURA 5.23: Plano s y Plano F en una trayectoria cerrada que encierra el cero

signo negativo.

Ahora bien, si la trayectoria hubiese encerrado varios ceros y varios polos, cada uno de estos ceros habría contribuido en 5.36 con un término que habría variado 360º en sentido horario, mientras que cada polo lo haría con otro término que habría variado 360º en sentido antihorario.

Otro detalle a tener en cuenta es que si la trayectoria pasa por un polo de $F(s)$, al calcularla en ese punto el resutado será ∞, y por lo tanto la trayectoria generada en el plano F no necesariamente será cerrada. Estos hechos pueden consignarse en el *principio del argumento*, que se presenta a continuación:

Principio del argumento
Dada una función $F(s)$, calculada en una trayectoria cerrada Γ, que no pasa por ningún polo de $F(s)$, recorrida en sentido horario, el resultado es también una trayectoria cerrada que encierra al origen en sentido horario un número de veces α:

$$\alpha = n_\Gamma - m_\Gamma \tag{5.40}$$

n_Γ = Número de ceros de F(s) encerrados por Γ
m_Γ = Número de polos de F(s) encerrados por Γ

Trayectoria de Nyquist

La trayectoria de Nyquist para un sistema continuo realimentado como el de la figura 5.1 es una curva cerrada Γ que abarca todo el semiplano derecho, y

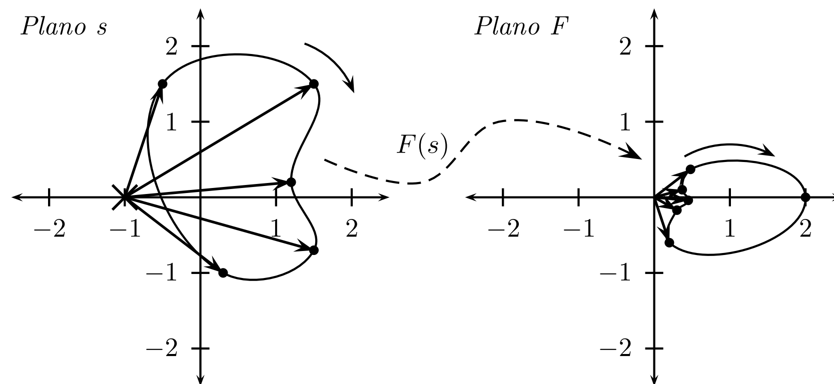


FIGURA 5.24: Plano s y Plano F en una trayectoria cerrada que no encierra el polo

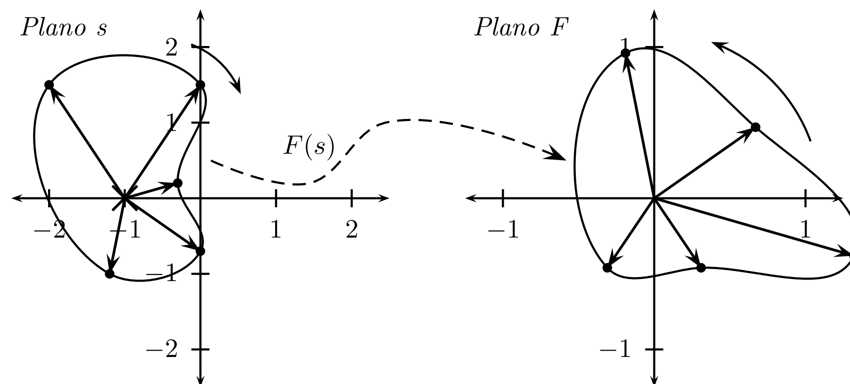


FIGURA 5.25: Plano s y Plano F en una trayectoria cerrada que encierra el polo

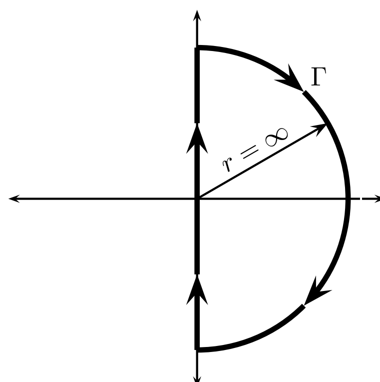


Figura 5.26: Trayectoria de Nyquist para el caso general

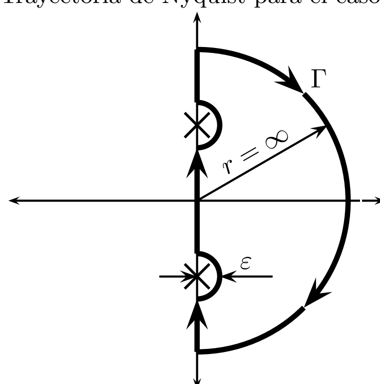


Figura 5.27: Trayectoria de Nyquist con polos en el eje imaginario

que no contiene ningún polo de $G(s)H(s)$. La figura 5.26 muestra la trayectoria de Nyquist Γ para el caso general.

Nótese que la trayectoria de Nyquist recorre todo el eje imaginario y regresa por una semicircunferencia de radio ∞, abarcando todo el semiplano derecho.

Para el caso especial en que $G(s)H(s)$ tiene polos en el eje imaginario es necesario modificar la trayectoria, tal como se muestra en la figura 5.26, mediante pequeñas semicircunferencias de radio arbitrariamente pequeño ε

Diagrama de Nyquist

Para un sistema continuo como el de la figura 5.1, el diagrama de Nyquist es la trayectoria orientada que resulta de calcular $G(s)H(s)$ a través de la trayectoria de Nyquist (ver figura 5.28).

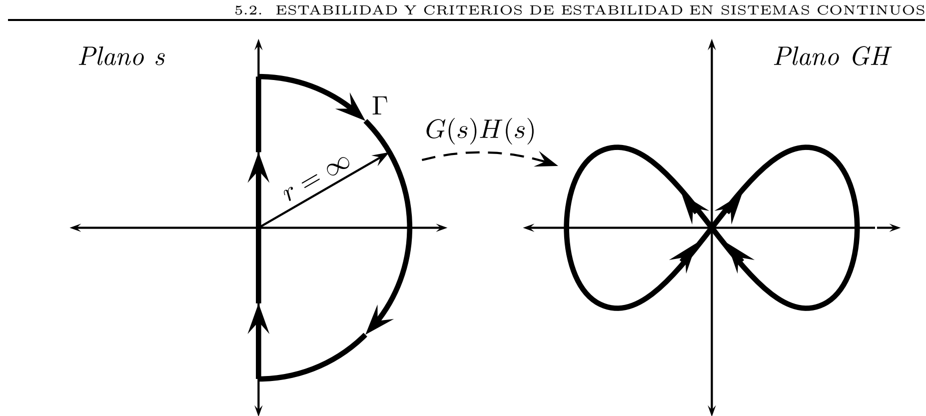


FIGURA 5.28: Diagrama de Nyquist

Criterio de Nyquist

Para el sistema continuo realimentado de la figura 5.1, con $K = 1$ definamos la función

$$R(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)}\frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} \quad (5.41)$$

Si calculamos $R(s)$ a lo largo de la trayectoria de Nyquist Γ, el resultado es una curva Υ. El criterio de Nyquist se deriva de aplicar el principio del argumento a esta curva. Aplicando (5.40) se tiene:

$$\begin{array}{l}\text{Número de veces}\\ \text{que } \Upsilon \text{ encierra al}\\ \text{origen}\end{array} = \begin{array}{l}\text{Número de ceros}\\ \text{de } R(s) \text{ encerrados}\\ \text{por } \Gamma\end{array} - \begin{array}{l}\text{Número de polos}\\ \text{de } R(s) \text{ encerrados}\\ \text{por } \Gamma\end{array} \quad (5.42)$$

La ecuación (5.42) puede escribirse de otra forma, si se tiene en cuenta que:

- La curva Γ encierra todo el semiplano derecho
- Los polos de $R(s)$ son los mismos polos de $G(s)H(s)$, como se puede verificar en (5.41)
- Los ceros de $R(s)$ son los mismos polos del sistema realimentado (con $K = 1$) como puede verse al comparar (5.41) con (5.5)

Con estas consideraciones la ecuación (5.42) se convierte en

Número de veces que Υ encierra al origen	$=$	Número de polos del sistema realimentado en el semiplano derecho	$-$	Número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho	(5.43)

Υ es la curva que resulta de calcular $R(s)$ a lo largo de la trayectoria de Nyquist Γ, pero como $R(s) = 1 + G(s)H(s)$, Υ es igual al diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ desplazado a la derecha una unidad; de tal manera que evaluar cuántas veces encierra Υ al origen es igual que evaluar cuántas veces encierra el diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ el punto $(-1, 0)$. Por esta razón podemos convertir (5.43) en la forma conocida como el criterio de Nyquist:

Criterio de Nyquist

El número de polos en el semiplano derecho que tiene un sistema continuo realimentado como el de la figura 5.1 , con $K = 1$ puede determinarse a partir de la ecuación

Número de veces que el diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ encierra al punto $(-1, 0)$	$=$	Número de polos del sistema realimentado en el semiplano derecho	$-$	Número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho	(5.44)

Para que el sistema realimentado sea estable debe tener cero polos en el semiplano derecho.

El criterio de Nyquist también permite determinar qué valores puede tener K en la figura 5.1, para que el sistema realimentado sea estable. Para ello debe notarse que el diagrama de Nyquist de $kG(s)H(s)$ difiere del diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$ sólo en la escala, es decir, tienen la misma forma pero el primero está amplificado respecto al segundo K veces. Observando el diagrama de Nyquist puede determinarse qué tanto debe amplificarse $G(s)H(s)$ para asegurar que no haya polos en el semiplano derecho.

Para estudiar los valores negativos de K que harían que el sistema fuera estable, podríamos trazar el diagrama de Nyquist de $-G(s)H(s)$; sin embargo esto no es necesario, ya que ese diagrama sólo puede diferir del de $G(s)H(s)$ en una rotación de 180°, por lo tanto es suficiente con averiguar qué tantas veces se encierra el punto $(1, 0)$.

Ejemplo 5.13 La figura 5.29 muestra el diagrama de Nyquist correspondiente a un sistema realimentado con

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad H(s) = \frac{1}{(s+3)} \tag{5.45}$$

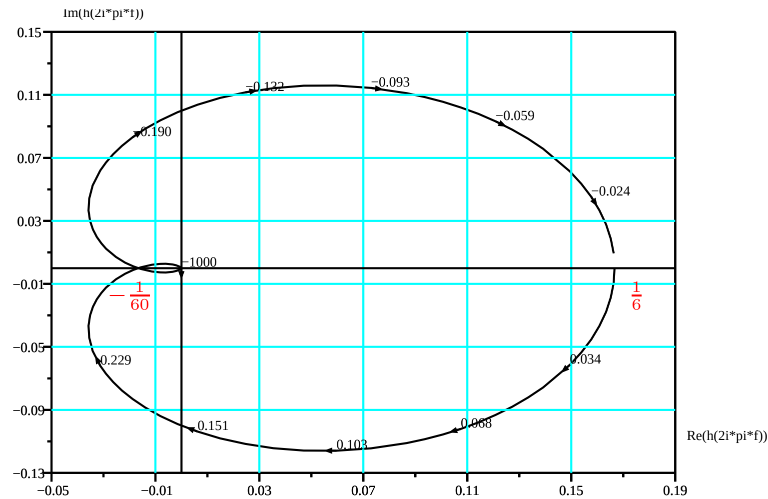


FIGURA 5.29: Diagrama de Nyquist para el ejemplo 5.13

En esa figura se han destacado los puntos en los que el Diagrama de Nyquist cruza el eje real ($-1/60$ y $1/6$). El número de polos que $G(s)H(s)$ tiene en el semiplano derecho es cero, de acuerdo con (5.45). De esta forma, el criterio de Nyquist, ecuación (5.44), establece que:

$$0 = \begin{array}{l}\text{Número de polos del}\\ \text{sistema realimenta-}\\ \text{do en el semiplano}\\ \text{derecho}\end{array} - 0 \tag{5.46}$$

y por lo tanto el sistema realimentado es estable para $K = 1$. Además, en el diagrama de Nyquist se observa que éste se puede amplificar hasta 60 veces sin que cambie el número de veces que encierra al punto $(-1,0)$, lo que significa que para $0 < k < 60$ el sistema sigue siendo estable. Si se amplifica por un valor superior a 60 el punto $(-1,0)$ resulta encerrado dos veces por el diagrama, y por lo tanto el sistema realimentado tendrá dos polos en el semiplano derecho, es decir, será inestable.

Evaluamos ahora la estabilidad para valores negativos de K. Remitiéndonos nuevamente a la figura 5.29, observamos que podemos amplificar 6 veces el diagrama sin que cambie el número de veces que encierra al punto $(1,0)$, lo que significa que para $-6 > K > 0$ el sistema sigue siendo estable. Si se amplifica por un valor mayor a 6 el punto $(1,0)$ resulta encerrado una vez por el diagrama, y por lo tanto el sistema realimentado tendrá un polo en el semiplano derecho, es decir,

será inestable. En resumen, el sistema será estable para $K \in (-6, 60)$.

5.3. Estabilidad y criterios de estabilidad en sistemas discretos

Por razones análogas a las expresadas en la sección 5.2, la estabilidad de sistemas dinámicos lineales discretos también está determinada por la ubicación de sus polos. La condición de estabilidad consiste en que éstos deben estar ubicados en el interior del círculo unitario.

Debido a que esta condición es diferente a la que existe para los sistemas continuos, las herramientas presentadas en la sección 5.2 no pueden emplearse directamente, sino que es necesario efectuar algún tipo de adecuación. Existen en general tres estrategias:

- Adecuar el sistema discreto para que *parezca* un sistema continuo. Este es el caso de la *transformación bilineal* que se explica en la sección 5.3.1.
- Diseñar estrategias específicas para sistemas discretos. El *criterio de Jury* que se presenta en la sección 5.3.2 corresponde a este caso.
- Adecuar las estrategias de análisis para que funcionen con sistemas discretos. Las secciones 5.3.3, 5.3.4 y 5.3.5 explican cómo adecuar las estrategias de *root-locus*, Bode y Nyquist, respectivamente (ver sección 5.2), para aplicarlas en el caso discreto.

5.3.1. Transformación bilineal

La transformación

$$r = \frac{z+1}{z-1} \tag{5.47}$$

Se conoce como la *transformación bilineal*, ya que al despejar r en (5.47) resulta una expresión similar:

$$z = \frac{r+1}{r-1} \tag{5.48}$$

La transformación bilineal tiene la propiedad de transformar la circunferencia unitaria en el eje imaginario. Para demostrarlo, supongamos un valor de z que está en la circunferencia unitaria, es decir $z = \cos\phi + j\sin\phi$ para algún valor de ϕ. Al aplicar (5.47) observamos que z se transforma en

$$r = \frac{\cos\phi + j\sin\phi + 1}{\cos\phi + j\sin\phi - 1}$$

que puede escribirse como

$$r = \frac{1+\cos\phi + j\sin\phi}{-1+\cos\phi + j\sin\phi} = \frac{(1+\cos\phi + j\sin\phi)(-1+\cos\phi - j\sin\phi)}{(-1+\cos\phi + j\sin\phi)(-1+\cos\phi - j\sin\phi)}$$

z	r
$1 + j0$	indefinido
$0.707 + j0.707$	$0 - j2.4142$
$0 + j1$	$0 - j1$
$-0.707 + j0.707$	$0 - j0.4142$
$-1 + j0$	$0 + j0$
$-0.707 - j0.707$	$0 + j0.4142$
$0 - j1$	$0 + j1$
$0.707 - j0.707$	$0 + j2.4142$

TABLA 5.6: Transformación bilineal de algunos puntos sobre la circunferencia unitaria

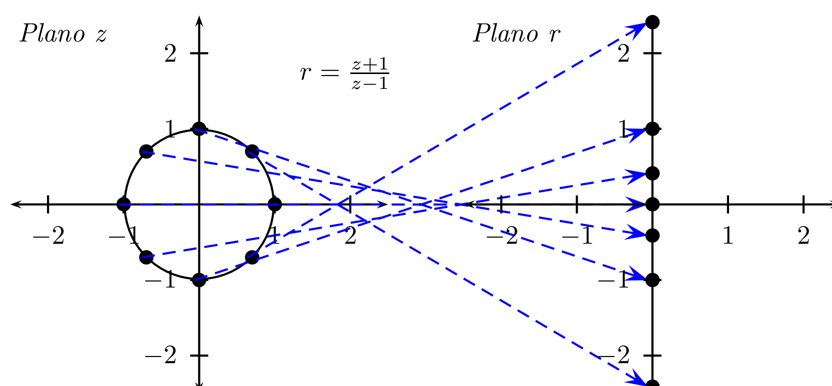


FIGURA 5.30: Transformación bilineal

Al efectuar las operaciones se obtiene que r es un imaginario puro:

$$r = \frac{-j2\sin\phi}{2 - 2\cos\phi} = j\frac{\sin\phi}{\cos\phi - 1} \tag{5.49}$$

La tabla 5.6 muestra cómo se transforman algunos puntos sobre la circunferencia unitaria. Esta transformación se visualiza en la figura 5.30.

Ejemplo 5.14 Supóngase que en el sistema de la figura 5.2 se tiene que

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.3} \qquad H(z) = \frac{1}{z + 0.7} \tag{5.50}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)H(z)} = \frac{K(z + 0.7)}{z^2 + z + (K + 0.21)} \tag{5.51}$$

r^2	$(2.21+K)$	$(0.21+K)$
r^1	$(1.58-2K)$	
r^0	$(0.21+K)$	

FIGURA 5.31: Arreglo de Routh para el sistema transformado

Al aplicar la transformación bilineal a $F(z)$ se obtiene

$$\hat{F}(r) = \frac{K\left(\left(\frac{r+1}{r-1}\right)+0.7\right)}{\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2+\left(\frac{r+1}{r-1}\right)+(K+0.21)} = \frac{K(r^2-1.4r-0.3)}{r^2(2.21+K)+r(1.58-2K)+0.21}$$

Los valores de K que hacen que todas las raíces de $F(z)$ estén dentro del círculo unitario en el plano z son los mismos valores que hacen que todas las raíces de $\hat{F}(r)$ estén en el semiplano izquierdo del plano r. Estos últimos pueden determinarse por medio del criterio de Routh-Hurwitz. El arreglo correspondiente se muestra en la figura 5.31 de donde se deduce que las condiciones para que el sistema del ejemplo sea estable son:

$$2.21+K>0 \qquad 1.58-2K>0 \qquad 0.21+K>0 \tag{5.52}$$

O lo que es equivalente:

$$-0.21<K<0.79 \tag{5.53}$$

5.3.2. Arreglo y criterio de Jury

El criterio de Jury [7] permite determinar cuántas raíces tiene un polinomio en el interior del círculo unitario. Cumple, para el caso discreto, un papel análogo al que cumple el criterio de Routh-Hurwitz en el caso continuo.

Construcción del arreglo de Jury

Dado un polinomio $p(z)$

$$p(z) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 \tag{5.54}$$

en donde los coeficientes a_i son reales y a_n es positivo, es posible construir el *Arreglo de Jury* de $p(z)$ a partir de los coeficientes a_i que aparecen en (5.54). Para ello, inicialmente se construye el arreglo que se muestra en la figura 5.32: la primera línea contiene los coeficientes de $p(z)$ en orden, desde a_0 hasta a_n, y en la segunda línea en orden inverso. En general, cada línea par contiene los mismos coeficientes que la línea inmediatamente anterior pero en el orden inverso.

[7] Existen versiones diferentes del criterio de Jury a las presentadas en estas notas.

Fila	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-k}	$\cdots$	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$					
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3					
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0					
$2n-3$	q_0	q_1	q_2						

FIGURA 5.32: Arreglo de Jury. Primeras dos líneas

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	b_0	b_1	b_2	b_3	
4	b_3	b_2	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2		

FIGURA 5.33: Arreglo de Jury del ejemplo 5.15. Primeras dos líneas

Los elementos de las líneas impares se construyen así:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \cdots \tag{5.55}$$

Es decir, el primer elemento de una fila impar se calcula como el determinante de la matriz construída tomando de las dos líneas inmediatamente anteriores la primera y la última columna; el segundo elemento de forma similar pero con la primera y la penúltima columnas; el tercero con la primera y la antepenúltima, y así sucesivamente. Dado que el último elemento sería el determinante de la matriz formada con dos columnas iguales (la primera dos veces), este valor será siempre cero, y por tanto no se escribe en el arreglo (se ha eliminado).

Ejemplo 5.15 Considérese el polinomio

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^5 \tag{5.56}$$

Las primeras dos líneas del arreglo de Jury para $p(z)$ se muestran en la figura 5.33. Sólo es necesario construir 5 líneas, porque $n = 4$ y $2n - 3 = 5$.

La tercera línea se construye así:

$$b_0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -24 \qquad b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	−24	−18	−12	−6	
4	−6	−12	−18	−24	
5	c_0	c_1	c_2		

FIGURA 5.34: Arreglo de Jury del ejemplo 5.15. Primeras cuatro líneas

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	2	3	4	5
2	5	4	3	2	1
3	−24	−18	−12	−6	
4	−6	−12	−18	−24	
5	504	360	180		

FIGURA 5.35: Arreglo de Jury del ejemplo 5.15. Arreglo completo

$$b_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12 \qquad b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

El arreglo con las cuatro primeras líneas se muestra en la figura 5.34. La quinta línea se construye así:

$$c_0 = \begin{vmatrix} -24 & -6 \\ -6 & -24 \end{vmatrix} = 504 \qquad c_1 = \begin{vmatrix} -24 & -12 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = 360 \qquad c_2 = \begin{vmatrix} -24 & -18 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 180$$

Criterio de Jury

El Criterio de Jury puede expresarse así:

Criterio de Jury
Las condiciones necesarias y suficientes para que $p(z)$ en (5.54) tenga todas sus raíces en el interior del círculo unitario del plano z son:

$$p(1) > 0 \tag{5.57a}$$

$$p(-1)\begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ < 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{5.57b}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} |a_0| & < & a_n \\ |b_0| & > & |b_{n-1}| \\ |c_0| & > & |c_{n-2}| \\ & \vdots & \\ |q_0| & > & |q_2| \end{array}\right\} n-1 \text{ condiciones} \tag{5.57c}$$

Nótese que este criterio se reduce a unas condiciones muy simples para el caso de polinomios de segundo orden ($n = 2$):

$$p(1) > 0 \tag{5.58a}$$

$$p(-1) > 0 \tag{5.58b}$$

$$|a_0| < a_2 \tag{5.58c}$$

Ejemplo 5.16 Supóngase el polinomio $p(z)$ de la ecuación (5.56) en el ejemplo 5.15, cuyo arreglo de Jury se muestra en la figura 5.35. Las condiciones (5.57) se convierten en:

$$p(1) = 1 + 2(1)^1 + 3(1)^2 + 4(1)^3 + 5(1)^4 = 15 > 0 \tag{5.59a}$$

$$p(-1) = 1 + 2(-1)^1 + 3(-1)^2 + 4(-1)^3 + 5(-1)^4 = 3 > 0 \tag{5.59b}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 = |a_0| & < & a_4 = 5 \\ 24 = |b_0| & > & |b_3| = 6 \\ 504 = |c_0| & > & |c_2| = 180 \end{array} \tag{5.59c}$$

Por lo que $p(z)$ tiene todas sus raíces en el interior del círculo unitario. Efectivamente, las raíces de $p(z)$ son:

$$r_{1,2} = 0.1378 \pm i0.6782 \qquad r_{3,4} = -0.5378 \pm i0.3583$$

$$|r_{1,2}| = 0.692 < 1 \qquad |r_{3,4}| = 0.646 < 1$$

Ejemplo 5.17 Supóngase ahora un sistema como el del ejemplo 5.14, es decir un sistema realimentado como el de la figura 5.2 con

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.3} \qquad H(z) = \frac{1}{z + 0.7} \tag{5.60}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$F(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)H(z)} = \frac{K(z + 0.7)}{z^2 + z + (K + 0.21)} \tag{5.61}$$

Para que el denominador de $F(z)$ tenga todas sus raíces en el círculo unitario, y por tanto el sistema realimentado sea estable, se deben satisfacer (5.57); como el denominador es de segundo orden, estas condiciones se convierten en las que muestra (5.58), es decir:

$$p(1) = 1 + 1 + (0.21 + K) > 0 \tag{5.62a}$$

$$p(-1) = 1 - 1 + (0.21 + K) > 0 \tag{5.62b}$$

$$|0.21 + K| = |a_0| < a_2 = 1 \tag{5.62c}$$

Estas condiciones se convierten en

$$K > -2.21 \tag{5.63a}$$

$$K > -0.21 \tag{5.63b}$$

$$-1.21 < K < 0.79 \tag{5.63c}$$

o lo que es equivalente:

$$-0.21 < K < 0.79 \tag{5.64}$$

que coincide con lo obtenido en (5.53)

Problemas en la construcción del arreglo de Jury

Es posible que algunos o todos los elementos de una fila en el arreglo de Jury sean cero, en cuyo caso se considera que el arreglo ha terminado de forma prematura. La solución a este inconveniente se considera fuera del alcance del curso y por lo tanto se ha omitido en estas notas[8].

5.3.3. Lugar geométrico de las raíces

El *root-locus* y el *root-locus* complementario muestran cómo varía la ubicación de los polos de la ecuación (5.5) al variar K. Como la forma de (5.5) y la de (5.6) son idénticas, pueden emplearse estos diagramas en forma análoga a como se emplean en el caso continuo para determinar la estabilidad de un sistema discreto realimentado como el de la figura 5.2: deben encontrarse las condiciones para que todas las ramas del *root-locus* y el *root-locus* complementario estén en el interior del círculo unitario.

Ejemplo 5.18 Tomemos el mismo sistema analizado en los ejemplos 5.14 y 5.17. Se trata de un sistema realimentado como el de la figura 5.2 con

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.3} \qquad H(z) = \frac{1}{z + 0.7} \tag{5.65}$$

El *root-locus* y el *root-locus* complementario de $G(z)H(z)$ se muestran en la figura 5.36. Se ha dibujado allí también el círculo unitario, para facilitar la determinación de la estabilidad.

El *root-locus* cruza el círculo unitario en $-0.5 \pm j\sqrt{1 - 0.5^2} = -0.5 \pm j0.86$, Estos puntos corresponden a una ganancia K_{c1} positiva tal que

$$K_{c1} = \left| \frac{1}{(-0.5 + j0.86 + 0.3)(-0.5 + j0.86 + 0.7)} \right| = 0.79 \tag{5.66}$$

El *root-locus* complementario cruza el círculo unitario en -1 y en 1.Estos puntos corresponden a unas ganancias K_{c2} y K_{c3} negativa tales que

$$K_{c2} = -\left| \frac{1}{(-1 + 0.3)(-1 + 0.7)} \right| = -0.21 \tag{5.67}$$

[8] véase [22].

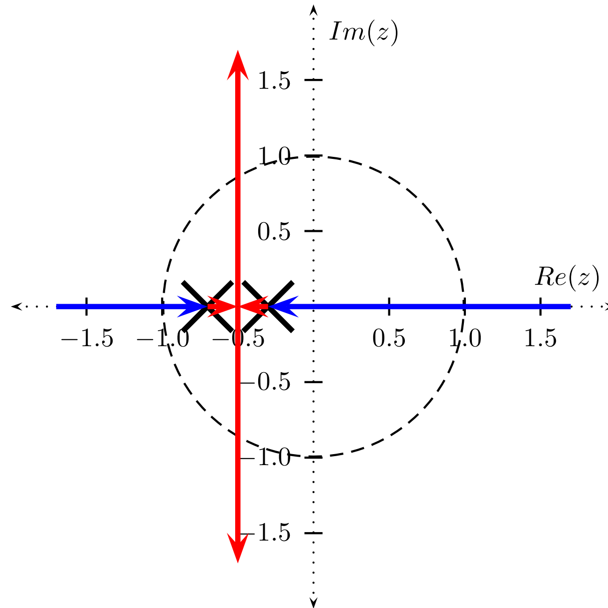


FIGURA 5.36: *root-locus* (en rojo) y *root-locus* complementario (en azul) para el ejemplo 5.18

$$K_{c3} = -\left|\frac{1}{(1+0.3)(1+0.7)}\right| = -2.21 \tag{5.68}$$

De las ecuaciones (5.66), (5.67) y (5.68) se desprenden las condiciones para que el *root-locus* y el *root-locus* complementario estén en el interior del círculo unitario: Para el *root-locus* se necesita que $K < 0.79$ y para el *root-locus* complementario que $K > -0.21$ y $K > -2.21$. Estas condiciones se pueden resumir en una sola:

$$-0.21 < K < 0.79 \tag{5.69}$$

que coincide con las encontradas en (5.53) y (5.64)

5.3.4. Diagramas y criterio de Bode

En la sección 5.2.3 se muestra cómo pueden emplearse los diagramas de Bode para estudiar la estabilidad de sistemas realimentados continuos como los de la figura 5.1. La figura 5.18 muestra la relación entre el cruce por el eje real de las ramas del *root-locus* y el *root-locus* complementario con los diagramas de Bode de $G(s)H(s)$.

Para estudiar la estabilidad de los sistemas discretos ya no es importante el cruce por el eje imaginario, sino el cruce por la circunferencia unitaria. Por esta razón, los diagramas de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ y $\arg G(j\omega)H(j\omega)$ ya no son útiles.

Dicho de otra forma, ya no es interesante recorrer el eje imaginario $j\omega$, sino la circunferencia unitaria. Esta última se puede recorrer con la función $e^{j\omega}$, variando ω entre 0 y 2π. En efecto, podemos emplear la Fórmula de Euler para escribir

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega \tag{5.70}$$

La ecuación (5.70) muestra que $e^{j\omega}$ es un número complejo de magnitud 1 y ángulo ω, por lo tanto, si ω varía entre 0 y 2π se recorre la circunferencia unitaria.

Al igual que en el caso continuo, podemos argumentar la simetría del *root-locus* para recorrer únicamente la mitad de la circunferencia, es decir, tomar $0 \leq \omega \leq \pi$.

En resumen, podemos trazar los diagramas de magnitud y ángulo para $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ con $0 \leq \omega \leq \pi$, o lo que es igual, para $G(jf)H(jf)$ con $0 < f < \frac{1}{2}$. Estos son los *diagramas de Bode para sistemas discretos* y emplean las mismas escalas que los diagramas de Bode para sistemas continuos.

La relación que existe entre los diagramas de *root-locus* y *root-locus* complementario, por una parte, y los diagramas de Bode, por otra, para sistemas discretos se muestra en la figura 5.37. De esta forma, la determinación de la estabilidad de sistemas realimentados discretos es completamente análoga al caso continuo, y se ilustra con el ejemplo 5.19

Ejemplo 5.19 Retomemos el mismo sistema analizado en los ejemplos 5.14, 5.17 y 5.18. Se trata de un sistema realimentado como el de la figura 5.2 con

$$G(z) = \frac{1}{z+0.3} \qquad H(z) = \frac{1}{z+0.7} \tag{5.71}$$

Los diagramas de Bode de $G(z)H(z)$ se muestran en la figura 5.38 (Nótese que f varía de 0 a $\frac{1}{2}$).

Se observa que el ángulo de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es -180° para una frecuencia de 0.3338Hz, es decir para $\omega = 2\pi 0.3338 = 2.094 rad/s$. En esa frecuencia el valor de la magnitud de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es de 2.04db, lo que significa que la magnitud de K, en decibeles, para la cual una rama del *root-locus* atraviesa la circunferencia unitaria es tal que $\frac{1}{|K_{c1}|_{\text{en db}}} = 2.04$, lo que equivale a:

$$\frac{1}{|K_{c1}|} = 10^{\frac{|K_{c1}|_{\text{en db}}}{20}} \qquad |K_{c1}| = 10^{-\frac{|K_{c1}|_{\text{en db}}}{20}}$$

$$|K_{c1}| = 10^{-\frac{2.04}{20}} = 0.79 \qquad K_{c1} = 0.79 \tag{5.72}$$

Para estudiar los cruces por la circunferencia unitaria de ramas del *root-locus* complementario, observamos que el diagrama de fase es asintótico a 0°, es decir

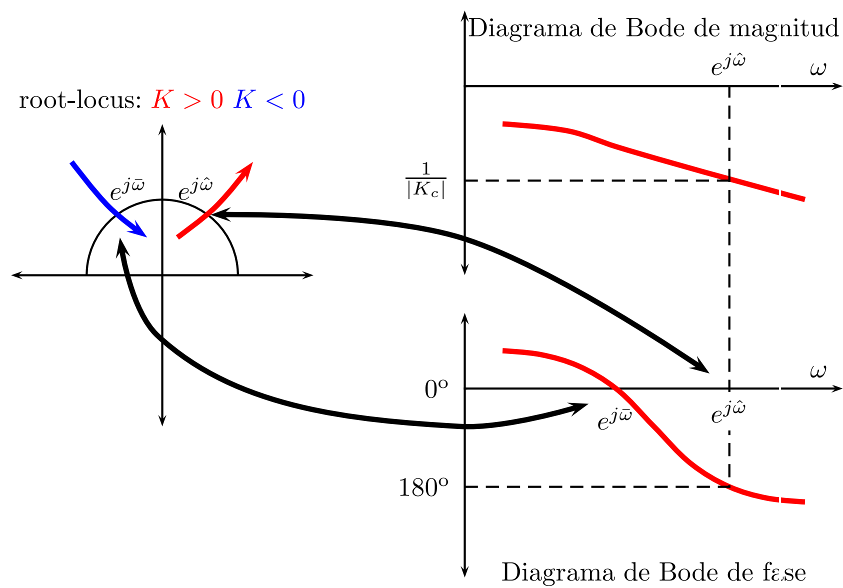


FIGURA 5.37: Relación entre el *root-locus* y los diagramas de Bode para el caso discreto

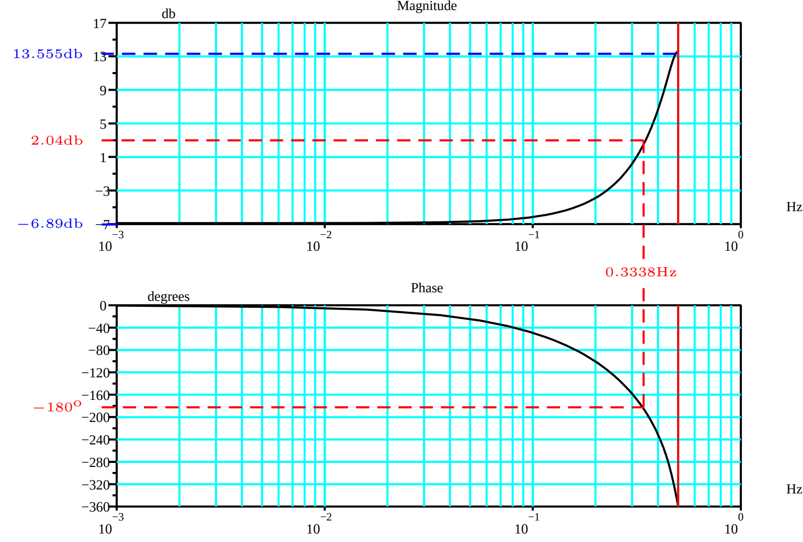


Figura 5.38: Diagramas de Bode para el ejemplo 5.19

que para $\omega = 0$ el ángulo de $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ es $0°$. También se observa que para una frecuencia de $\frac{1}{2}$Hz, es decir $\omega = \pi$ el ángulo es de $-360°$, que es igual a $0°$.

Lo anterior significa que dos ramas del *root-locus* complementario cruzan la circunferencia unitaria en K_{c2} y K_{c3} que se pueden calcular como:

$$|K_{c2}| = 10^{-\frac{-6.89}{20}} = 2.21 \qquad K_{c2} = -2.21 \tag{5.73}$$

$$|K_{c3}| = 10^{-\frac{13.555}{20}} = 0.21 \qquad K_{c3} = -0.21 \tag{5.74}$$

Los resultados de las ecuaciones (5.72) a (5.74) son coherentes con los obtenidos en (5.53), (5.64) y (5.69).

5.3.5. Diagrama y criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist para sistemas realimentados continuos de la ecuación (5.44) se construye empleando las trayectorias de Nyquist que se muestran en las figuras 5.26 y 5.27. Estas trayectorias han sido diseñadas en forma tal que encierran todo el semiplano derecho y así poder emplear el principio del argumento (ecuación (5.40)) en forma conveniente.

FIGURA 5.39: Trayectoria de Nyquist para el caso discreto general

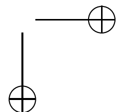
Para sistemas discretos realimentados como los de la figura 5.2 es necesario modificar la trayectoria de Nyquist para que encierre toda la porción del plano complejo que está por fuera del círculo unitario. La trayectoria seleccionada se muestra en la figura 5.39; en caso de que $G(z)H(z)$ tenga polos exactamente sobre la circunferencia unitaria, es necesario modificar la trayectoria como se muestra en la figura 5.40. Denominaremos al diagrama obtenido con estas trayectorias *diagrama de Nyquist para sistemas discretos*, o simplemente *diagrama de Nyquist discreto*.

En estas condiciones, el criterio de Nyquist para sistemas discretos puede enunciarse así:

Criterio de Nyquist para sistemas discretos
El número de polos por fuera del círculo unitario que tiene un sistema discreto realimentado como el de la figura 5.2 , con $K = 1$ puede determinarse a partir de la ecuación

Número de veces que el diagrama de Nyquist discreto de $G(z)H(z)$ encierra al punto $(-1,0)$	=	Número de polos del sistema realimentado por fuera del círculo unitario	−	Número de polos de $G(z)H(z)$ por fuera del círculo unitario	(5.75)

Para que el sistema realimentado sea estable debe tener cero polos por fuera del círculo unitario.



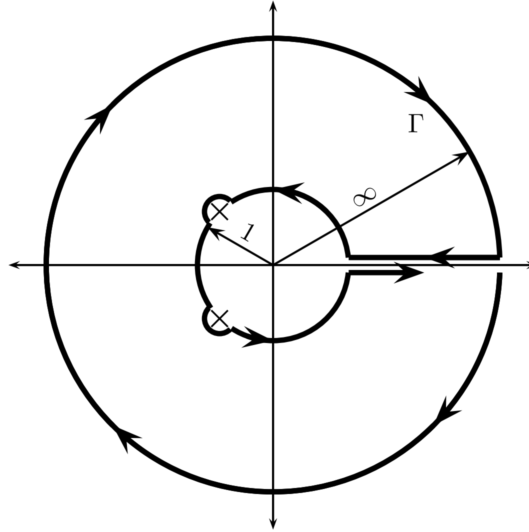


FIGURA 5.40: Trayectoria de Nyquist para el caso discreto con polos en la circunferencia unitaria

Ejemplo 5.20 Retomemos el mismo sistema analizado en los ejemplos 5.14, 5.17, 5.18 y 5.19. Se trata de un sistema realimentado como el de la figura 5.2 con

$$G(z) = \frac{1}{z + 0.3} \qquad H(z) = \frac{1}{z + 0.7} \tag{5.76}$$

El diagrama de Nyquist de $G(z)H(z)$ se muestra en la figura 5.41; puede observarse que el diagrama de Nyquist encierra una vez el punto $(-1, 0)$. Además, $G(z)H(z)$ tiene cero polos por fuera del círculo unitario. Según (5.75) se tiene que

$$1 = \begin{array}{l}\text{Número de polos del}\\ \text{sistema realimenta-}\\ \text{do por fuera del}\\ \text{círculo unitario}\end{array} - 0 \tag{5.77}$$

y por lo tanto el sistema realimentado con $K = 1$ es inestable. Sin embargo el número de veces que se encierra el punto $(-1, 0)$ puede ser 0 si el diagrama se amplifica por un valor positivo menor que 0.79. En estas condiciones el sistema realimentado será estable. Por lo tanto, para que el sistema realimentado sea estable con valores positivos de K, se necesita que $0 < K < 0.79$

Para estudiar los valores negativos de K que harían que el sistema fuera estable, podríamos trazar el diagrama de Nyquist de $-G(z)H(z)$; sin embargo esto no es necesario, ya que ese diagrama sólo puede diferir del de $G(z)H(z)$ en una rotación de $180°$, por lo tanto es suficiente con averiguar qué tantas veces se encierra el punto $(1, 0)$.

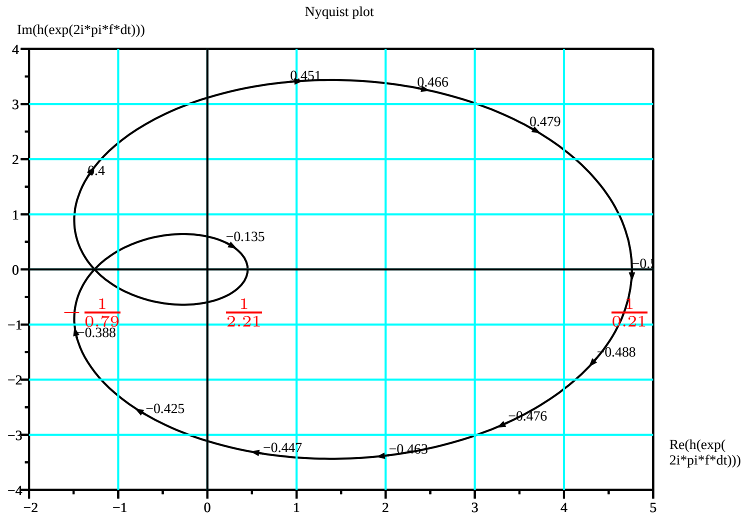


FIGURA 5.41: Diagrama de Nyquist para el ejemplo 5.20

En la figura 5.41 se observa que el número de veces que el diagrama de Nyquist puede encerrar al punto $(1, 0)$ es 0, 1 ó 2 en las siguientes condiciones:

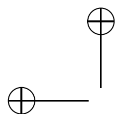
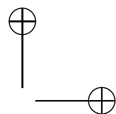
- Si se amplifica por una cantidad menor que 0.21 lo encierra 0 veces.
- Si se amplifica por una cantidad mayor que 0.21 y menor que 2.21 lo encierra 1 vez.
- Si se amplifica por una cantidad mayor que 2.21 lo encierra 2 veces.

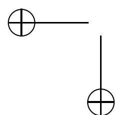
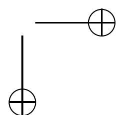
Por lo tanto, para que el sistema realimentado sea estable con valores negativos de K, se necesita que $-0.21 < K < 0$

Al combinar los resultados obtenidos para valores positivos y negativos de K se tiene que

$$-0.21 < K < 0.79 \tag{5.78}$$

que coincide con (5.53), (5.64), (5.69) y (5.72).

Capítulo 6

Representación en variables de estado

6.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han presentado distintas estrategias para modelar el comportamiento de sistemas dinámicos continuos y discretos, entre ellas:

- Ecuaciones diferenciales o de diferencia.
- Funciones de transferencia.
- Respuestas al impulso.
- Diagramas de bloque.
- Diagramas de flujo de señal.

En este capítulo se estudia una nueva alternativa que emplea un conjunto de variables denominadas *variables de estado*. Puede pensarse que éstas son tan sólo variables matemáticas auxiliares, aunque en ocasiones tienen un sentido físico. Algunas de las ventajas que se obtienen con esta nueva representación son las siguientes:

- La representación de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas es más sencilla.
- Toda la dinámica del sistema se representa por ecuaciones diferenciales o de diferencia de primer orden.

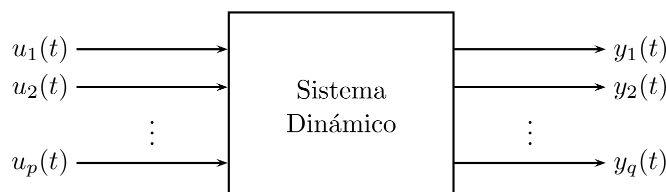


Figura 6.1: Sistema Continuo de múltiples entradas y múltiples salidas

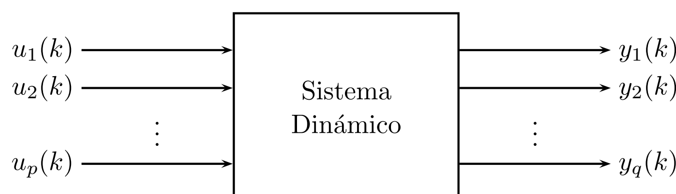


Figura 6.2: Sistema Discreto de múltiples entradas y múltiples salidas

- Permite el desarrollo de métodos computacionales más eficientes para la simulación de sistemas dinámicos.
- Brinda una nueva perspectiva sobre la dinámica de los sistemas.
- Algunas de las técnicas de control moderno (como el control robusto) se basan en este tipo de representación.

Vale la pena aclarar que si bien las ecuaciones que se emplean son de primer orden, éstas operan sobre vectores. Refiriéndonos a las figuras 6.1 y 6.2, si se trata de un sistema continuo serán:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) =& \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big) \\ \mathbf{y}(t) =& \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big) \end{aligned} \tag{6.1}$$

y si se trata de un sistema discreto serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) =& \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k\big) \\ \mathbf{y}(k) =& \mathbf{g}\big(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k\big) \end{aligned} \tag{6.2}$$

En las ecuaciones (6.1) y (6.2) $\mathbf{u}$ es un vector que contiene cada una de las p entradas al sistema, $\mathbf{y}$ es un vector que contiene cada una de las q salidas del sistema, $\mathbf{x}$ es un vector que contiene cada una de las n variables de estado del

sistema, es decir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}_{p\times 1} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}_{q\times 1} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{6.3}$$

Las ecuaciones vectoriales (6.1) y (6.2) son en realidad un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones (6.1) corresponden a algo de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = g_1(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \\ \dot{y}_1(t) = g_2(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \\ \vdots \\ \dot{y}_q(t) = g_q(t)\,(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t), t) \end{cases}$$

En general, estudiaremos sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo, de múltiples entradas y múltiples salidas. Si el sistema es continuo, como el de la figura 6.1 su modelo corresponderá a las ecuaciones Matriciales

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si el sistema es discreto, como el de la figura 6.2 su modelo corresponderá a las ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{6.5}$$

En las ecuaciones (6.4) y (6.5) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son matrices de tamaño adecuado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t)_{n\times 1} &= \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}(t)_{n\times 1} + \mathbf{B}_{n\times p}\mathbf{u}(t)_{p\times 1} \\ \mathbf{y}(t)_{q\times 1} &= \mathbf{C}_{q\times n}\mathbf{x}(t)_{n\times 1} + \mathbf{D}_{q\times p}\mathbf{u}(t)_{p\times 1} \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1)_{n\times 1} &= \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}(k)_{n\times 1} + \mathbf{B}_{n\times p}\mathbf{u}(k)_{p\times 1} \\ \mathbf{y}(k)_{q\times 1} &= \mathbf{C}_{q\times n}\mathbf{x}(k)_{n\times 1} + \mathbf{D}_{q\times p}\mathbf{u}(k)_{p\times 1} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Para encontrar la solución de las ecuaciones (6.4) y (6.5) y efectuar su análisis, pero sobre todo para buscarle un significado a las variables de estado, se emplean algunos conceptos de Álgebra Lineal. Con el propósito de recordar esos conceptos, se presentan en la sección 6.2 los resultados necesarios más importantes. Una presentación formal de éstos se encuentra en el apéndice D, de donde se han extraído algunos apartes y ejemplos.

6.2. Algunos resultados de álgebra lineal

6.2.1. Espacios vectoriales

Sea un conjunto Γ y $\mathbf{F} : (\Phi, \oplus, \otimes)$ un campo (usualmente $\mathbf{F}$ se trata de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación). A los elementos de Γ se les denomina *Vectores*, y a los elementos de Φ *Escalares*. Γ tiene estructura de *Espacio Vectorial sobre* $\mathbf{F}$ si está dotado de una operación binaria $+$ (suma vectorial) y una operación $\cdot$ entre elementos de Γ y Φ (Producto por escalar) que cumplen las siguientes propiedades:

Para la suma vectorial

V.1 **Clausurativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x + y \in \Gamma$

V.2 **Asociativa:** $\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

V.3 **Modulativa:** $\exists\, 0 \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x + 0 = x$

V.4 **Invertiva:** $\forall\, x \in \Gamma \quad \exists\, (-x) \mid x + (-x) = 0$

V.5 **Conmutativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x + y = y + x$

Para el producto por escalar

V.6 **Clausurativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha \in \Phi \quad \alpha \cdot x \in \Gamma$

V.7 **Asociativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha, \beta \in \Phi \quad (\alpha \otimes \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

V.8 **Modulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 1 \cdot x = x$. 1 es el módulo de $\otimes$

V.9 **Anulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 0 \cdot x = \mathbf{0}$. Donde 0 es el módulo de $\oplus$, y $\mathbf{0}$ es el módulo de $+$

Para las dos operaciones

V.10 **Distributiva respecto a $+$:** $\forall\, x, y \in \Gamma,\ \forall \alpha \in \Phi \quad \alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$

V.11 **Distributiva respecto a $\oplus$:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad (\alpha \oplus \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$

Ejemplo 6.1 Uno de los espacios vectoriales más conocidos, y que servirá para futuros ejemplos en este capítulo es el formado por $\mathbb{R}^2$ sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales. En general, $\mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales forma un espacio vectorial.

Ejemplo 6.2 El conjunto de todos los polinomios sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales entre polinomios forma un espacio vectorial.

Ejemplo 6.3 El conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el campo $\mathbb{C}$ con la operación $+$ definida como la suma punto a punto forma un espacio vectorial.

Ejemplo 6.4 El conjunto de todas las matrices de tamaño fijo $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales entre matrices forma un espacio vectorial.

Los siguientes son algunos conceptos asociados a los espacios vectoriales:

Subespacio: es un espacio vectorial contenido dentro de otro espacio vectorial, por ejemplo una recta que cruce por el origen dentro del plano.

Combinación lineal: es una expresión de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

en donde los α_i son escalares y los x_i son vectores

Independencia lineal: un conjunto de vectores es linealmente independiente si la única combinación lineal de ellos cuyo resultado es $\mathbf{0}$ es la que tiene todos los coeficientes α iguales a 0.

Conjunto generado: es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores de un cierto conjunto, al que se denomina *conjunto generador*.

Dimensión: es el máximo número de vectores linealmente independientes que puede haber en un espacio vectorial.

Base: es cualquier conjunto de vectores linealmente independiente que además genera el espacio vectorial. En $\mathbb{R}^2$ la base estándar está formada por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$

Coordenadas de un vector: un vector x de un espacio vectorial puede escribirse como una única combinación lineal de su base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$:

$$x = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n$$

Los coeficientes α_i de esa combinación lineal son las coordenadas de x en la base B.

Cambios de base: un mismo vector tendrá diferentes coordenadas en dos bases diferentes. Sean $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ dos bases del mismo espacio vectorial V de dimensión n. Definimos las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como las matrices que tienen en sus columnas cada uno de los elementos de las bases A y B respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Un vector x tendrá coordenadas α_i en la base A y β_i en la base B. Definimos los vectores columna α y β que contienen las coordenadas:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Las expresiones que permiten encontrar las coordenadas de x en una base a partir de sus coordenadas en la otra, son las siguientes:

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha \tag{6.8}$$

En caso de que A sea la base estándar, la matriz $\mathbf{A}$ resulta ser la matriz identidad de orden n y (6.8) se convierte en

$$\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\alpha \tag{6.9}$$

Transformaciones lineales: dado un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión n, entenderemos por *transformación lineal*, en el contexto de este capítulo, una función $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que puede representarse por una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times n$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

En otras palabras, una transformación lineal toma un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ y produce un vector $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ mediante la operación $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Transformaciones y cambios de base: sea T una transformación lineal, que en la base estándar se representa por la matriz $\mathbf{T}_\alpha$. La misma transformación se representará en otra base $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \cdots, \mathbf{b_n}\}$ por

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B} \tag{6.10}$$

en donde $\mathbf{B} = [\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \cdots\ \mathbf{b_n}]$

Ejemplo 6.5 La función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ consistente en la rotación de vectores $90°$ en sentido horario es una transformación lineal representada por la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Un vector $\mathbf{x}$ de coordenadas (a, b) se convertirá en un vector $\mathbf{y}$, cuyas coordenadas se calculan así:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

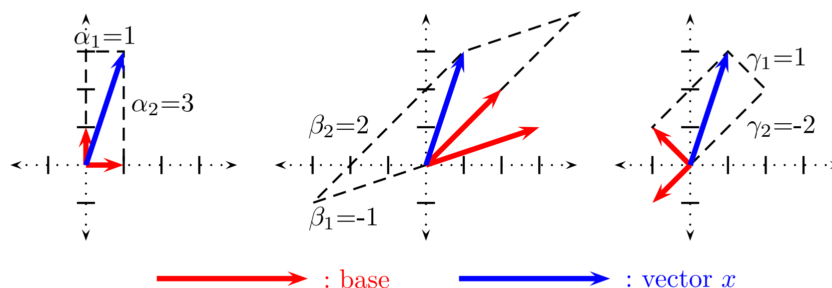


FIGURA 6.3: Cambio de base de un vector

Ejemplo 6.6 En $\mathbb{R}^2$ puede definirse una base con cualquier pareja de vectores no paralelos. Definamos por ejemplo $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $B = \{(3,1),(2,2)\}$ y $C = \{(-1,1)(-1,-1)\}$ (vectores rojos en la figura 6.3).

Consideremos ahora el vector x en la figura 6.3. Sus coordenadas en la base estándar A serán

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas de x en las bases B y C construimos las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y empleamos (6.9)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\alpha = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\alpha = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que las coordenadas en las bases B y C satisfacen las relaciones (6.8)

$$\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\gamma \qquad \gamma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\beta$$

Ejemplo 6.7 En el ejemplo 6.5 se mostró que la rotación de 90° en sentido horario estaba representada en la base estándar por la matriz

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La misma transformación se representará en la base $B = \{(3,1),(2,2)\}$ por la matriz

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B}$$

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2.5 & -2 \end{bmatrix}$$

Supóngase ahora el vector $\mathbf{x}$, cuyas coordenadas en la base estándar son $\alpha_x = (1,3)$ y en la base B son $\beta_x = (-1,2)$ (ejemplo 6.6). Al efectuar la rotación de 90° en sentido horario se obtendrá un vector $\mathbf{y}$, cuyas coordenadas en la base estándar serán α_y y en la base B serán β_y:

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

6.2.2. Valores y vectores propios

Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Un escalar λ es un *valor propio* o *valor característico* de $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Cualquier vector no nulo $\mathbf{v}$ que satisfaga

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \tag{6.11}$$

es un *vector propio* asociado con el valor propio λ[1].

La relación (6.11) implica que para un vector propio $\mathbf{v}$ el efecto de aplicarle la transformación lineal $\mathbf{A}$ es igual que amplificarlo por el escalar λ. Esto implica que un vector y el vector transformado son colineales o paralelos y por lo tanto linealmente dependientes.

Para calcular los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ puede reescribirse la ecuación (6.11) como

$$\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

En donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de igual orden que $\mathbf{A}$, es decir $n \times n$. Para que exista una vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ debe cumplirse que

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{6.12}$$

El lado izquierdo de la ecuación (6.12) corresponde a un polinomio de orden n en la variable λ conocido como el *polinomio característico* de $\mathbf{A}$ y denotado por $\Delta(\lambda)$.

Dicho de otra forma, los valores propios de $\mathbf{A}$ son las raíces de su polinomio característico $\Delta(\lambda)$. Por tanto, la matriz $\mathbf{A}$ tiene n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; estos valores podrán ser reales o complejos y podrán ser diferentes o repetidos.

[1] La definición (6.11) se refiere estrictamente a *valores y vectores propios por derecha*, para distinguirlos de los *valores y vectores propios por izquierda*, que deben satisfacer $\mathbf{v^t A} = \lambda\mathbf{v^t}$. En este texto sólo se consideran los primeros, y por tanto se hace referencia a ellos simplemente como *valores y vectores propios*.

Ejemplo 6.8 Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 4) & -1 \\ 2 & (\lambda - 1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$ deben cumplir (6.11):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{11} + v_{21} \\ -2v_{11} + v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{11} \\ 2v_{21} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{11} + v_{21} & = 2v_{11} \\ -2v_{11} + v_{21} & = 2v_{21} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{11} o para v_{21}. Por ejemplo, si escogemos $v_{11} = 1$ obtenemos $v_{21} = -2$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ será

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$ también deben cumplir (6.11):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{12} + v_{22} \\ -2v_{12} + v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_{12} \\ 3v_{22} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un segundo sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{12} + v_{22} & = 3v_{12} \\ -2v_{12} + v_{22} & = 3v_{22} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{12} o para v_{22}. Por ejemplo, si escogemos $v_{12} = 1$ obtenemos $v_{22} = -1$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ será

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.9 Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ 1 & (\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 2)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm j$$

Al aplicar (6.11) para λ_1 y λ_2 se obtienen dos sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2v_{11} + v_{21} & = (2+j)v_{11} \\ -v_{11} + 2v_{21} & = (2+j)v_{21} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_{12} + v_{22} & = (2-j)v_{12} \\ -v_{12} + 2v_{22} & = (2-j)v_{22} \end{cases}$$

Seleccionando arbitrariamente $v_{11} = 1$ y $v_{12} = 1$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

o en general

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ ja \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -ja \end{bmatrix}$$

6.2.3. Forma canónica de Jordan

Matrices con valores propios diferentes

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los n valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$, todos diferentes, y sea $\mathbf{v}_i$ un vector propio asociado a λ_i con $i = 1, 2, \cdots, n$. El conjunto $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto sirve como una base para el espacio vectorial.

Si se efectúa un cambio de base a la nueva base V, la matriz $\mathbf{A}$ se transforma en la matriz $\mathbf{\Lambda}$ de acuerdo con (6.10):

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \tag{6.13}$$

La matriz $\mathbf{\Lambda}$ es la *matriz diagonalizada*, o la *forma canónica de Jordan* de $\mathbf{A}$, y se define así:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{M}$ se denomina la *matriz modal*, y se define así:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Esta afirmación puede demostrarse fácilmente al comprobar que $\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM}$:

$$\mathbf{M\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AM} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{Av}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ entonces las ecuaciones anteriores se reducen a $\mathbf{M\Lambda} = \mathbf{AM}$ o lo que es igual

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$$

Ejemplo 6.10 La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son (Ejemplo 6.8) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\}$ dada por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.11 La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son (Ejemplo 6.9) $\lambda_{1,2} = 2 \pm j$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

Tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\}$ dada por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} j/2 & -j/2 \\ j/2 & j/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j & 0 \\ 0 & 2-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Matrices con valores propios repetidos

Al intentar efectuar la diagonalización de una matriz $\mathbf{A}$ que tenga valores propios repetidos puede encontrarse un tropiezo debido a que los vectores propios no necesariamente son linealmente independientes; de hecho, lo usual es que no lo sean aunque existen casos en que lo son.

Al no contar con un número suficiente de vectores propios linealmente independientes no es posible construir una base que diagonalice la matriz. No será posible obtener $\mathbf{M}^{-1}$ y no se podrá calcular $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$. Pese a ello, siempre se podrá obtener una *diagonalización por bloques*.

Dada una transformación lineal $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$, de valores propios λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, se define la *degeneracidad* del valor propio λ_i, denotada por d_i, como el número de vectores propios linealmente independientes asociados a un valor propio λ_i, y se calcula así:

$$d_i = n - \rho(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

en donde $\rho(\mathbf{X})$ es el *rango* de la matriz $\mathbf{X}$, que equivale al número de columnas (o filas) linealmente independientes de $\mathbf{X}$

Ejemplo 6.12 Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 2 & (\lambda - 5) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$$

La degeneracidad de $\lambda = 3$ se obtiene así:

$$d_1 = 2 - \rho(3\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$d_1 = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix}\right) = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1$$

Lo anterior significa que aunque λ tiene multiplicidad 2, sólo es posible encontrar un vector linealmente independiente. Éste se obtiene empleando (6.11), y resulta ser

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

No es posible construir una base para el espacio de dimensión 2 con un sólo vector, por lo tanto no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$

Ejemplo 6.13 Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Construimos $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 3) & 0 & 1 \\ -1 & (\lambda - 2) & 1 \\ 1 & 0 & (\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico resulta ser

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16$$

Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Para determinar la degeneracidad de λ_1 calculamos $\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (2 - 3) & 0 & 1 \\ -1 & (2 - 2) & 1 \\ 1 & 0 & (2 - 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = n - \rho(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad d_1 = 3 - 1 = 2$$

Lo anterior significa que existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Estos dos vectores junto con el vector propio asociado a $\lambda_3 = 4$ pueden formar una base y por tanto es posible diagonalizar $\mathbf{A}$. Para obtener los tres vectores propios empleamos (6.11):

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Se originan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3a - c = 2a \\ a + 2b - c = 2b \\ -a + 3c = 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3d - f = 4a \\ d + 2e - f = 4e \\ -d + 3f = 4f \end{cases}$$

Que se convierten en

$$a = c \qquad d = e = -f$$

Podemos construir dos vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ que satisfacen $a = c$ y un tercero $\mathbf{v}_3$ que satisface $d = e = -f$, por ejemplo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\}$ la transformación $\mathbf{A}$ se representa por $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Cuando no se puede encontrar un conjunto de vectores propios linealmente independiente lo suficientemente grande para diagonalizar la matriz, debe acudirse al concepto de *vectores propios generalizados* para lograr una *diagonalización por bloques*.

El concepto de vector propio generalizado y la forma de calcularlos se salen del ámbito de este texto, aunque una presentación detallada puede encontrarse en el apéndice D. No obstante, es posible determinar en forma sencilla cuál es la forma de la matriz diagonalizada por bloques, o *forma canónica de Jordan* de una matriz, según se explica a continuación.

En general, se representa la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$ por $\mathbf{J}$, y es de la forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}$$

en donde cada término $\mathbf{J}_i$ es una submatriz cuadrada (un *bloque de Jordan*) de la forma

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Cada bloque de Jordan está asociado a un valor propio de la matriz $\mathbf{A}$. Para conocer la forma exacta de la matriz $\mathbf{J}$ es necesario responder estas preguntas:

- ¿Cuántos bloques tiene asociados cada valor propio no repetido de la matriz $\mathbf{A}$?
- ¿De qué tamaño es cada uno de los bloques de Jordan asociados a cada valor propio no repetido de la matriz $\mathbf{A}$?

El siguiente algoritmo permite obtener las respuestas. Se plantea para un valor propio λ, y deberá aplicarse para cada valor propio diferente:

1. Se define la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$.

$\hat{\nu}_r$	×	×		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$\hat{\nu}_2$	×	$\cdots$	×	
$\hat{\nu}_1$	×	$\cdots$	×	×

FIGURA 6.4: Diagrama de Matthew vacío simple

2. Se calcula $\rho(\mathbf{B}^0), \rho(\mathbf{B}^1), \rho(\mathbf{B}^2), \cdots, \rho(\mathbf{B})^r$ hasta que no haya cambio al incrementar el exponente.

3. Se calculan las *nulidades* $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$, en donde $\nu_i = n - \rho(\mathbf{B}^i)$.

4. Se calcula $\hat{\nu}_i = \nu_i - \nu_{i-1}$, para $i = 1, 2, \cdots, r$.

5. Se construye el *diagrama de Matthew* con la forma que se presenta en la figura 6.4: el número de celdas de cada fila del diagrama de Matthew está determinado por $\hat{\nu}_i$.

6. Utilizar las siguientes convenciones:

   a) Identificar el número de columnas del diagrama como q.

   b) Identificar las columnas del diagrama como $c_1, c_2, \cdots, c_q$ de izquierda a derecha.

   c) Identificar el tamaño de cada columna como $h_1, h_2, \cdots, h_q$.

7. En esas condiciones el número de bloques de Jordan asociados al valor propio λ es q, y el tamaño de cada uno de esos bloques es $h_1, h_2, \cdots, h_q$.

En general, la forma canónica de Jordan será entonces:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{12} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{1q_1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mathbf{J}_{m1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m2} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{mq_m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}$$

Ejemplo 6.14 Sea $\mathbf{A}$ la matriz[2]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los valores propios de $\mathbf{A}$ hacemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1](\lambda-2)^2[(1-\lambda)^2-1] = (\lambda-2)^5\lambda = 0$$

Es decir, $\mathbf{A}$ tiene un valor propio 2 de multiplicidad 5 y un valor propio 0 de multiplicidad 1. Nos proponemos encontrar el diagrama de Matthew de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$.

Para ello definimos $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ y calculamos $\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3, \cdots$, sus rangos y nulidades

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{I} \qquad \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^0 = 6 \qquad \nu_0 = 6 - 6 = 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 4 \\ \nu_1 = 6 - 4 = 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{B^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = 2 \\ \nu_2 = 6 - 2 = 4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{B^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = 1 \\ \nu_3 = 6 - 1 = 5 \end{matrix}$$

[2]Adaptado de [5, pp.: 43]

Al calcular $\mathbf{B}^4$ encontramos $\nu_4 = \nu_3$ y por tanto no es necesario continuar. Con la información anterior podemos calcular $\hat{\nu}_i$:

$$\begin{array}{rcrcrr} \hat{\nu}_3 & = & \nu_3 - \nu_2 & = & 5-4= & 1 \\ \hat{\nu}_2 & = & \nu_2 - \nu_1 & = & 4-2= & 2 \\ \hat{\nu}_1 & = & \nu_1 - \nu_0 & = & 2-0= & 2 \end{array}$$

Con esta información podemos construir el diagrama de Matthew

×	
×	×
×	×

De donde se deduce que $q = 2$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$; en otras palabras, el valor propio 2 tendrá 2 bloques de Jordan, uno de tamaño 3×3 y otro de tamaño 2×2. Adicionalmente, el valor propio 0 tendrá un único bloque de Jordan de tamaño 1×1, por ser un valor propio de multiplicidad 1. En consecuencia la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$ será

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices con valores propios complejos

Dado que los valores propios de una matriz pueden ser complejos, en general las matrices de Jordan y Modal, $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$, serán complejas.

No obstante, cuando existen valores propios complejos es posible efectuar otro cambio de coordenadas diferente que produce también una matriz diagonal por bloques, pero real, conocida como la *forma canónica real de Jordan.*

La nueva matriz modal $\mathbf{M}_R$ reemplaza cada pareja de vectores propios complejos conjugados de $\mathbf{M}$ por dos vectores reales, uno con la parte real y otro con la parte imaginaria de los vectores reemplazados.

Para un valor propio complejo $\lambda = a \pm jb$ que no se repite, el bloque de Jordan asociado tendrá la forma

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.15 Sea la matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} = -0.5 \pm j0.866$$

La forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ y la matriz modal que la produce son:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 + j0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0.408 & (-0.015 - j0.408) & (-0.015 + j0.408) \\ 0.816 & (0.721 + j0.382) & (0.721 - j0.382) \\ 0.408 & (0.346 - j0.217) & (0.346 + j0.217) \end{bmatrix}$$

Para obtener la forma canónica real de Jordan de $\mathbf{A}$ construimos la matriz real $\mathbf{M}_R$ reemplazando las columnas complejas por columnas con la parte real e imaginaria de éstas, y verificamos.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} -0.408 & -0.015 & -0.408 \\ 0.816 & 0.721 & 0.382 \\ 0.408 & 0.346 & -0.217 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & -0.866 & -0.5 \end{bmatrix}$$

6.2.4. Funciones de matrices cuadradas

Sea $f(\sigma)$ una función que opera sobre un escalar, y sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $n \times n$. En esta sección se aborda el problema de cómo calcular $f(\mathbf{A})$, es decir, cómo extender $f(\sigma)$ de los escalares a las matrices.

Si $f(\sigma)$ es un polinomio, la extensión a las matrices se fundamenta en la definición

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k \text{ veces}} \qquad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \tag{6.14}$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene una representación canónica de Jordan $\mathbf{J}$ obtenida con la matriz modal $\mathbf{M}$, es decir, si $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ entonces

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})\cdots(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})}_{k \text{ veces}} = \mathbf{M}\underbrace{(\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})}_{k \text{ veces}}\mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1} \tag{6.15}$$

Como $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, el cálculo de $\mathbf{J}^k$ puede efectuarse como sigue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2^k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n^k \end{bmatrix}$$

Empleando la definición (6.14), un polinomio genérico

$$f(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \cdots + a_n\sigma^n$$

puede calcularse en $\mathbf{A}$ como

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_n\mathbf{A}^n$$

o en función de las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{J}$:

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{MIM}^{-1} + a_1\mathbf{MJM}^{-1} + a_2\mathbf{MJ}^2\mathbf{M}^{-1} + \cdots + a_n\mathbf{MJ}^n\mathbf{M}$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\mathbf{J})\mathbf{M}^{-1} \tag{6.16}$$

Ejemplo 6.16 Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.17 Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

calculamos los primeros términos $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, $\mathbf{A}^5$ y $\mathbf{A}^6$:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} -b^6 & 0 \\ 0 & -b^6 \end{bmatrix}$$

Observando la secuencia se puede inferir que

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{k}{2}}b^k & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{k}{2}}b^k \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es par} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{k-1}{2}}b^k \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}b^k & 0 \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

También es posible extender una función $f(\sigma)$ que no sea un polinomio de los escalares a las matrices empleando la representación de $f(\sigma)$ en series de Taylor expandidas alrededor de 0 (series de MacLaurin):

$$f(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!} \left. \frac{d^k f(\sigma)}{d\sigma^k} \right|_{\sigma} \tag{6.17}$$

Empleando (6.17) se puede expresar $f(\sigma)$ como un polinomio de σ. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, puede calcularse $f(\mathbf{A})$ empleando ese polinomio.

Las siguientes son las expansiones de algunas funciones comunes:

$$e^{\sigma t} = 1 + \frac{\sigma t}{1!} + \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^3 t^k}{3!} + \frac{\sigma^4 t^k}{4!} + \cdots \tag{6.18}$$

$$\cos \sigma t = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^4 t^4}{4!} - \frac{\sigma^6 t^6}{6!} + \frac{\sigma^8 t^8}{8!} + \cdots \tag{6.19}$$

$$\sin \sigma t = \frac{\sigma t}{1!} - \frac{\sigma^3 t^3}{3!} + \frac{\sigma^5 t^5}{5!} - \frac{\sigma^7 t^7}{7!} + \cdots \tag{6.20}$$

Ejemplo 6.18 Sea $\mathbf{A}$ una matriz diagonal como la del ejemplo 6.16. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ podemos emplear (6.18)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^k}{4!} + \cdots$$

que de acuerdo con los resultados del ejemplo 6.16 se calculará así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} g_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$g_i(t) = (1 + \frac{\lambda_i t}{1!} + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_i^3 t^3}{3!} + \cdots)$$

Cada uno de los términos de la diagonal, $g_i(t)$, corresponde a la expansión en series de Taylor de una exponencial como las de (6.18), por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ será:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.19 Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros, como la del ejemplo 6.17. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ podemos emplear (6.18)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^k}{4!} + \cdots$$

que de acuerdo con los resultados del ejemplo 6.17 se calculará así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{t^2b^2}{2!} + \frac{t^4b^4}{2!} + \cdots) & (\frac{tb}{1!} - \frac{t^3b^3}{3!} + \frac{t^5b^5}{5!} + \cdots) \\ (-\frac{tb}{1!} + \frac{t^3b^3}{3!} - \frac{t^5b^5}{5!} + \cdots) & (1 - \frac{t^2b^2}{2!} + \frac{t^4b^4}{2!} + \cdots) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la matriz corresponde a la expansión de Taylor de una sinusoide como las de (6.19) y (6.20), por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse como

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.20 Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ escribimos $\mathbf{A}$ como la suma de dos matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

De tal manera que $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{C}t}$. Empleando los resultados de los ejemplos 6.18 y 6.19 se tiene que

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}$$

6.3. Variables de estado

De acuerdo con la presentación de la sección 6.1, se estudiarán en este capítulo sistemas dinámicos de múltiples entradas y múltiples salidas como los de las figuras 6.1 y 6.2.

El modelo matemático de estos sistemas serán las ecuaciones (6.21) y (6.22) para los casos continuos y discretos, respectivamente; en ambos casos la primera ecuación, que contiene la dinámica del sistema, se denomina *ecuación de estado* y la segunda *ecuación de salida*.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{6.21}$$

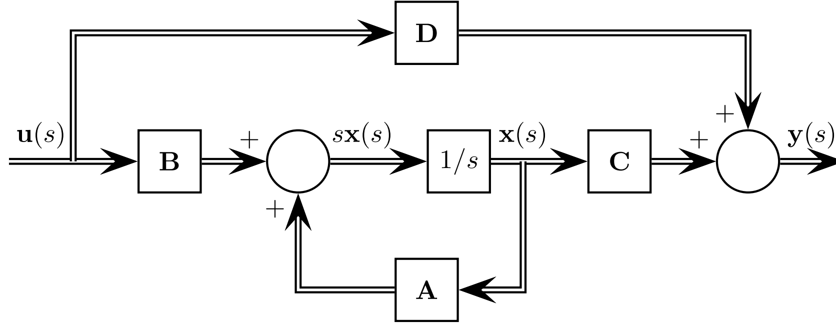


Figura 6.5: Diagrama de bloques de un sistema continuo en representación de espacio de Estado

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \tag{6.22}$$

En las ecuaciones (6.21) y (6.22) **A**, **B**, **C** y **D** son matrices reales cuyas dimensiones están especificadas en (6.6), mientras que **u**, **y**, **x** son los vectores definidos en (6.3), que contienen las variables de entrada, salida y estado respectivamente.

Nótese que la dinámica del sistema está representada en la ecuación de estado, pues es allí en donde aparecen las derivadas o las diferencias, mientras que la ecuación de salida es algebráica.

Las figuras 6.5 y 6.6 muestran dos diagramas de bloques que representan las ecuaciones 6.21 y 6.22 respectivamente. Para interpretar adecuadamente estos diagramas es necesario tener en cuenta que:

1. Las flechas representan *vectores* de señales y los bloques **A**, **B**, **C** y **D** matrices.

2. El bloque $1/s$ en la figura 6.5 corresponde a la función de transferencia de un integrador $y(t) = \int_0^t x(t)dt$ que opera sobre cada una de las señales de entrada de forma independiente.

3. El bloque $1/z$ en la figura 6.6 corresponde a la función de transferencia de un bloque de retardo $y(k) = x(k-1)$ que opera sobre cada una de las señales de entrada de forma independiente.

4. Como en todo diagrama de bloques con funciones de transferencia, se han supuesto condiciones iniciales nulas.

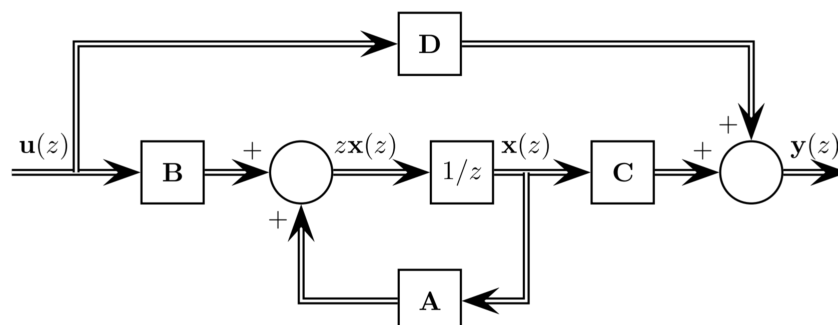


Figura 6.6: Diagrama de bloques de un sistema discreto en representación de espacio de Estado

6.3.1. El concepto de estado

¿Qué son las variables de estado? una posible aproximación es pensar en ellas como variables matemáticas auxiliares que permiten representar el comportamiento de sistemas mediante ecuaciones como (6.1) y (6.2), que en el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo se convierten en (6.21) y (6.22).

No obstante, existe otra posible interpretación: los sistemas dinámicos se rigen por ecuaciones diferenciales y de diferencia; este tipo de ecuaciones tienen una única solución tan solo si se establece un conjunto de condiciones, denominadas *condiciones auxiliares*; usualmente éstas se determinan en el instante de tiempo considerado como inicial, y por tanto se denominan *condiciones iniciales*.

De lo anterior se desprende que para conocer el comportamiento de un sistema dinámico se necesita cierta información adicional a la sola ecuación diferencial. Este hecho justifica la siguiente definición:

Definición 6.1 Estado
El *Estado* de un sistema en el tiempo t_0 (o en k_0 si es discreto) es la cantidad de información necesaria en ese instante de tiempo para determinar de forma única, junto con las entradas $\mathbf{u}$, el comportamiento del sistema para todo $t \geq t_0$ (o para todo $k \geq k_0$ si es discreto)

De acuerdo con la definición 6.1, las *variables de estado* serán variables que muestran cómo evoluciona el estado del sistema, es decir, serán variables que contienen la información necesaria para predecir la evolución del comportamiento del sistema en forma única.

También suelen definirse las variables de estado como cualquier conjunto de variables que describa el comportamiento del sistema, siempre y cuando ese conjunto sea del menor tamaño posible.

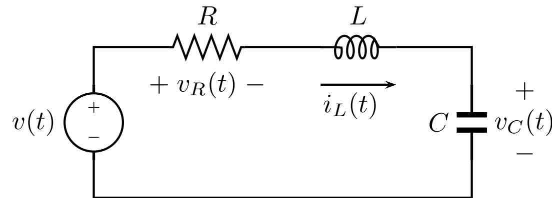


FIGURA 6.7: Circuito RLC serie

Cualquiera que sea la interpretación que se adopte, debe tenerse presente que:

- Las variables de estado pueden tener o no sentido físico.
- Las variables de estado pueden o no ser medibles.
- Para un mismo sistema dinámico las variables de estado no son únicas; de hecho, se pueden definir infinitos conjuntos de variables que sirvan como variables de estado.

Ejemplo 6.21 Para conocer el comportamiento de un circuito RLC serie como el de la figura 6.7 es necesario establecer los valores de $i_L(0^+)$ y $v_C(0^+)$, por esta razón, las variables $i_L(t)$ y $v_C(t)$ sirven como variables de estado.

La aplicación de las leyes de Kirchhoff en el circuito da como resultado

$$\begin{cases} Ri_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) = v(t) \\ i_L(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

Estas ecuaciones pueden organizarse de la siguiente forma

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i_L(t) - \dfrac{1}{L}v_C(t) + \dfrac{1}{L}v(t) \\ \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i_L(t) \end{cases}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dv_C(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix}$$

Supóngase que en el circuito se quiere estudiar el comportamiento de las variables $v_R(t)$ e $i_L(t)$, es decir, que seleccionamos estas variables como las salidas del sistema. Dado que $v_R(t) = Ri_L(t)$, podremos escribir la ecuación

$$\begin{bmatrix} v_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

En resumen, una representación en variable de estado del circuito estaría dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dv_C(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

que son de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

en donde

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.22 Supóngase un motor eléctrico de corriente continua controlado por campo, como el que se muestra en la figura 6.8, con corriente de armadura constante, que mueva una carga de momento de inercia J, con coeficiente de fricción viscosa B a una velocidad angular $\omega(t)$.

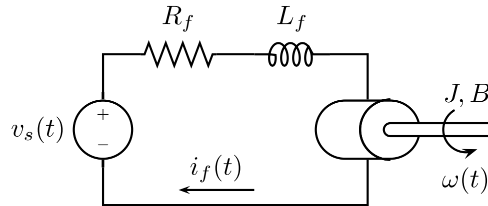


FIGURA 6.8: Motor DC controlado por campo

La ecuación del circuito eléctrico de campo es

$$R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} = v_s(t) \tag{6.23}$$

Al considerar que la corriente de armadura es constante, se tiene que el par motor $T(t)$ generado es directamente proporcional a la corriente de campo con una cierta constante de proporcionalidad K_T, es decir

$$T(t) = K_T i_f(t) \tag{6.24}$$

La aplicación de las leyes de Newton al sistema dan la ecuación

$$T(t) - B\omega(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} \tag{6.25}$$

Las ecuaciones (6.23), (6.24) y (6.25) pueden escribirse como

$$\begin{cases} \dfrac{di_f(t)}{dt} = -\dfrac{R_f}{L_f}i_f(t) + \dfrac{1}{L_f}v_s(t) \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \dfrac{K_T}{J}i_f(t) - \dfrac{B}{J}\omega(t) \end{cases} \tag{6.26}$$

que en forma matricial se convierten en

$$\begin{bmatrix} di_f(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f/L_f & 0 \\ K_T/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

Si seleccionamos como variable de salida la velocidad angular, obtenemos una representación en variable de estado del sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} di_f(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f/L_f & 0 \\ K_T/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6.28}$$

No obstante, ésta no es la única representación posible; podemos, por ejemplo, seleccionar como variables de estado $T(t)$ y $\omega(t)$, en cuyo caso la representación en variable de estado será

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dT(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f/L_f & 0 \\ 1/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6.29}$$

Ejemplo 6.23 A continuación se presenta un modelo lineal simple del crecimiento demográfico de una sociedad. Se ha distribuido el total de la población por franjas de edad:

$x_1(k)$: Población con edades entre 0 y 10 años
$x_2(k)$: Población con edades entre 10 y 20 años
$\vdots$ $\vdots$
$x_n(k)$: Población con edades entre $(n-1)\times 10$ y $n \times 10$ años

Si denotamos por $y(k)$ la población total de la sociedad en el periodo k se tendrá:

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + \cdots + x_n(k) = \sum_{i=1}^{n} x_i(k)$$

Si tomamos cada periodo como un intervalo de 10 años, en el periodo $k+1$ las personas que en el periodo k están en la franja i, estarán en la franja $k+1$ en el periodo $i+1$, salvo aquellos que mueran, es decir

$$x_i(k+1) = x_{i-1}(k) - \gamma_{i-1}x_{i-1}(k) \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

en donde γ_i es la rata de mortalidad para la franja de edades número i.

Para encontrar $x_1(k+1)$, es decir el número de personas que nacen en el periodo k, podemos suponer que cada franja de edades tiene una rata de reproductividad diferente ν_i, es decir

$$x_1(k+1) = \nu_1 x_1(k) + \nu_2 x_2(k) + \cdots + \nu_n x_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i(k)$$

De esta manera podemos escribir las ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{n-1} & \nu_n \\ 1-\gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\gamma_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Además, podríamos considerar los fenómenos de migración como entradas al sistema. Definamos $u_i(k)$ como la diferencia entre el número de inmigrantes y emigrantes de la franja i en el periodo k; con esta definición el modelo se convierte

en

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ 1-\gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

6.3.2. Representación de estado a partir de E.D.

Existe un procedimiento sencillo para obtener una representación en variables de estado de sistemas de una entrada y una salida de los cuales se conoce la ecuación diferencial o de diferencia que lo rige.

Supóngase un sistema dinámico continuo descrito por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (6.30)$$

El comportamiento del sistema queda unívocamente determinado si se conocen las condidiones iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\cdots$, $y^{(n-1)}(0)$, por lo tanto podemos seleccionar las siguientes variables de estado:

$$\begin{array}{rcccl} x_1(t) & = & y(t) & & \\ x_2(t) & = & \frac{dy}{dt} & = & \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) & = & \frac{d^2y}{dt^2} & = & \dot{x}_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}(t) & = & \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} & = & \dot{x}_{n-2}(t) \\ x_n(t) & = & \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} & = & \dot{x}_{n-1}(t) \end{array} \qquad (6.31)$$

De tal manera que (6.30) puede escribirse como

$$a_n\dot{x}_n(t) + a_{n-1}x_n(t) + \cdots + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = u(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{a_0}{a_n}x_1(t) - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) + \frac{1}{a_n}u(t) \qquad (6.32)$$

Las ecuaciones (6.31) y (6.32) se escriben en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

De forma análoga puede obtenerse una representación en variables de estado de sistemas discretos de una entrada y una salida a partir de su ecuación de diferencias.

Supóngase un sistema dinámico discreto, descrito por la ecuación de diferencias:

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k) \tag{6.33}$$

Podemos seleccionar las variables de estado:

$$\begin{array}{rcccl} x_1(k) & = & y(k) & & \\ x_2(k) & = & y(k+1) & = & x_1(k+1) \\ x_3(k) & = & y(k+2) & = & x_2(k+1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}(k) & = & y(k+n-2) & = & x_{n-2}(k+1) \\ x_n(k) & = & y(k+n-1) & = & x_{n-1}(k+1) \end{array} \tag{6.34}$$

de tal manera que la ecuación (6.33) se convierte en:

$$x_n(k+1) = -\frac{a_0}{a_n} x_1(k) - \frac{a_1}{a_n} x_2(k) - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(k) + \frac{1}{a_n} u(k) \tag{6.35}$$

Las ecuaciones (6.34) y (6.35) se escriben en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \end{bmatrix}$$

6.4. Sistemas continuos libres

Como un primer paso para el análisis de la ecuación (6.21), en esta sección se estudia la ecuación de estado con el sistema *libre* (sin entradas), es decir estudiamos la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{6.36}$$

La ecuación matricial (6.36) recuerda la ecuación escalar

$$\frac{dx}{dt} = ax(t)$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{at}x(0) \tag{6.37}$$

debido a que

$$\frac{d\,e^{at}}{dt} = ae^{at} \qquad e^{a0}x(0) = x(0) \tag{6.38}$$

Resulta entonces natural preguntarse si al reemplazar el escalar a por la matriz $\mathbf{A}$, y la variable x por el vector de variables $\mathbf{x}$ se mantienen las relaciones (6.38) y así encontrar una solución de (6.36) similar a (6.37).

Es posible demostrar que

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \qquad e^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) \tag{6.39}$$

Para ello, empleamos la expansión en series de Taylor (6.18)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots$$

de donde se observa que $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, y por lo tanto $\mathbf{x}(0)e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{x}(0)$. Además, podemos calcular la derivada de $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5t^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

De esta forma hemos demostrado (6.39), y por lo tanto también hemos demostrado que la solución de (6.36) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{6.40}$$

En (6.40) $\mathbf{x}(0)$ es el vector que contiene las condiciones iniciales de $\mathbf{x}(t)$. Por otra parte, es posible calcular $e^{\mathbf{A}t}$ por diversos métodos, de los cuales destacamos los siguientes[3]:

Series de Taylor: podemos emplear la expansión en series de Taylor (6.18) directamente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots \tag{6.41}$$

Este método no es práctico, debido a la dificultad de calcular $\mathbf{A}^k$; sin embargo, en algunos casos especiales este cálculo es sencillo, como se muestra en los ejemplos 6.18, 6.19 y 6.20

Forma canónica de Jordan: si se ha obtenido la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, entonces se tienen dos matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$ tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

y por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\mathbf{I}\mathbf{M}^{-1} + \frac{(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})t}{1!} + \frac{(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})^2t^2}{2!} + \frac{(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})^3t^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\mathbf{I}\mathbf{M}^{-1} + \frac{\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}t}{1!} + \frac{\mathbf{M}\mathbf{J}^{\mathbf{2}}\mathbf{M}^{-1}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{M}\mathbf{J}^{\mathbf{3}}\mathbf{M}^{-1}t^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{J}t}{1!} + \frac{\mathbf{J}^{\mathbf{2}}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{J}^{\mathbf{3}}t^3}{3!} + \cdots\right)\mathbf{M}^{-1}$$

[3]Los ejemplos 6.18, 6.19 y 6.20 ponen de manifiesto que si $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ entonces $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{M}^{-1} \tag{6.42}$$

La ventaja de emplear (6.42) radica en que $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, y por lo tanto $e^{\mathbf{J}t}$ es más fácil de calcular, especialmente si $\mathbf{J}$ es completamente diagonal.

Transformada de Laplace: podemos obtener la solución de (6.36) empleando la transformada de Laplace, y así deducir el valor de $e^{\mathbf{A}t}$.

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}\}$$
$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s)$$
$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{x}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)\right\}$$
$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$
$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \tag{6.43}$$

Jordan y Laplace: Pueden combinarse (6.42) y (6.43) para obtener

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}\right\}\mathbf{M}^{-1} \tag{6.44}$$

Ejemplo 6.24 Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -1$

La ecuación es de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, por lo tanto la solución será $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}\mathbf{x}(0)$. El cálculo de $e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}$ es muy simple, debido a que $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal (Ejemplo 6.18):

$$e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} = \begin{bmatrix}e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-1t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$$

Este resultado también se habría podido obtener mediante la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix}s-2 & 0 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & 0 & s-3\end{bmatrix} \qquad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3}\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{-t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

En un caso como éste, en el que la matriz $\mathbf{A}$ es diagonal, realmente la ecuación diferencial matricial representa un conjunto de ecuaciones diferenciales sencillas en el que las variables están *desacopladas*. La ecuación matricial y las condiciones iniciales pueden escribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2(t) = -1x_2(t) & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_3(t) = 3x_3(t) & x_3(0) = -1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{2t} \\ x_2(t) = e^{-t} \\ x_3(t) = -e^{t} \end{cases}$$

Ejemplo 6.25 Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$

En el ejemplo 6.10 se ha obtenido la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, que ha resultado ser la matriz $\mathbf{\Lambda}$, perfectamente diagonal; es decir se han encontrado las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{\Lambda}$ tales que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

lo que permite calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-e^{2t}+2e^{3t}) & (-e^{2t}+e^{3t}) \\ (2e^{2t}-2e^{3t}) & (2e^{2t}-e^{3t}) \end{bmatrix}$$

También podemos obtener este resultado mediante la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s-4 & -1\\ 2 & s-1\end{bmatrix} \qquad (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{s^2-5s+6}\begin{bmatrix}(s-1) & 1\\ -2 & (s-4)\end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} & \frac{1}{(s-2)(s-3)}\\ \frac{-2}{(s-2)(s-3)} & \frac{s-4}{(s-2)(s-3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{-1}{(s-2)}+\frac{2}{(s-3)}\right) & \left(\frac{-1}{(s-2)}+\frac{1}{(s-3)}\right)\\ \left(\frac{2}{(s-2)}+\frac{-2}{(s-3)}\right) & \left(\frac{2}{(s-2)}+\frac{-1}{(s-3)}\right)\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\begin{bmatrix}(-e^{2t}+2e^{3t}) & (-e^{2t}+e^{3t})\\ (2e^{2t}-2e^{3t}) & (2e^{2t}-e^{3t})\end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}(-e^{2t}+2e^{3t}) & (-e^{2t}+e^{3t})\\ (2e^{2t}-2e^{3t}) & (2e^{2t}-e^{3t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-e^{2t}+2e^{3t})x_{10}+(-e^{2t}+e^{3t})x_{20}\\ (2e^{2t}-2e^{3t})x_{10}+(2e^{2t}-e^{3t})x_{20}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}(-x_{10}-x_{20})+e^{3t}(2x_{10}+x_{20})\\ e^{2t}(2x_{10}+2x_{20})+e^{3t}(-2x_{10}-x_{20})\end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.26 Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0)=x_{10}$ y $x_2(0)=x_{20}$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_{1,2}=-1\pm j2$, y dos vectores propios asociados son

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-j2\\ 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}j2\\ 1\end{bmatrix}$$

Debido a que los valores propios son complejos, es conveniente encontrar la forma canónica real de Jordan de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J_R}=\mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R$$

$$\mathbf{M}_R=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_R=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

lo que permite calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{M}_R e^{\mathbf{J}_R t}\mathbf{M}_R^{-1}$$

Empleando el resultado del ejemplo 6.20

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t\\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1/2 & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

También podemos obtener este resultado mediante la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \qquad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+5} \begin{bmatrix} (s+1) & 4 \\ -1 & (s+4) \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} & \frac{4}{(s+1)^2+2^2} \\ \frac{-1}{(s+1)^2+2^2} & \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{At}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10}e^{-t}\cos 2t + 2x_{20}e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{x_{10}}{2}e^{-t}\sin 2t + x_{20}e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.27 Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Además se puede comprobar que no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$. En consecuencia, la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ será un único bloque de tamaño 2. La obtención de los vectores propios generalizados con los que se obtiene la forma canónica de Jordan escapa al alcance de este texto. No obstante, vamos a suponer que se han encontrado las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de tal manera que se puede calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{M}^{-1}$$

No obstante, como $\mathbf{J}$ no es diagonal, debemos calcular $e^{\mathbf{J}t}$ mediante la transformada de Laplace.

$$s\mathbf{I} - \mathbf{J} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \qquad (s\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{J}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Retomando el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}-2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t} \end{bmatrix}$$

También podemos obtener este resultado mediante la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \qquad (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} (s-1) & 4 \\ -1 & (s+3) \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{(s+1)}+\frac{-2}{(s+1)^2}\right) & \left(\frac{4}{(s+1)^2}\right) \\ \left(\frac{-1}{(s+1)^2}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)}+\frac{2}{(s+1)^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{At}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t}-2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t}-2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-t}-2te^{-t})x_{10}+4x_{20}te^{-t} \\ -x_{10}te^{-t}+(e^{-t}+2te^{-t})x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{10})e^{-t}+(-2x_{10}+4x_{20})te^{-t} \\ (x_{20})e^{-t}+(-x_{10}+2x_{20})te^{-t} \end{bmatrix}$$

6.4.1. Retratos de fase

Supóngase ahora un sistema como (6.36) de dimensión dos, es decir, supóngase

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

Una vez solucionada (6.45) es posible trazar las curvas $x_1(t)$ vs t y $x_2(t)$ vs t. También es posible trazar una curva $x_1(t)$ vs $x_2(t)$, en un plano $x_1 \times x_2$ conocido como el *plano de fase* (ver Ejemplo 6.28). La curva resultante es una *trayectoria* de (6.45), y puede visualizarse como una curva paramétrica definida por $(x_1(t), x_2(t))$ con el parámetro t variando de 0 a ∞.

La solución de (6.45) depende de las condiciones iniciales, por lo tanto la trayectoria depende de las condiciones iniciales. Sobre el mismo plano de fase se pueden trazar diferentes trayectorias obtenidas con distintas condiciones iniciales; el resultado es el *retrato de fase* de (6.45).

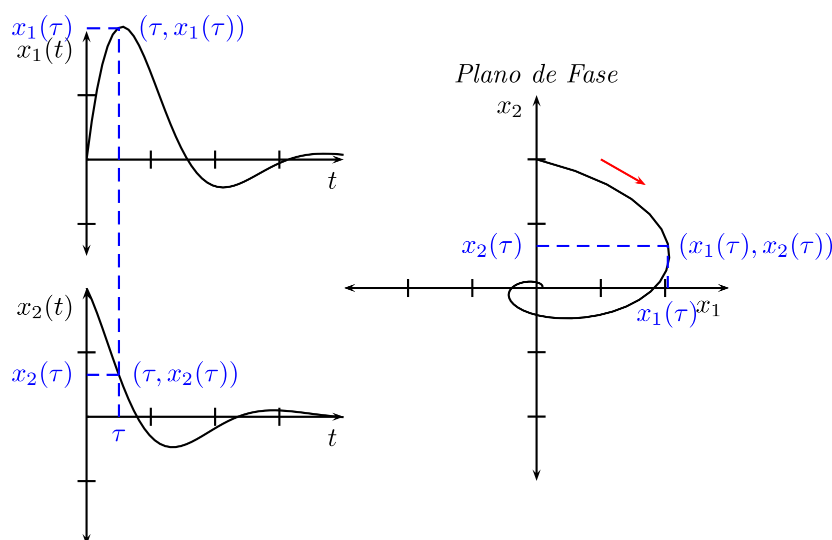


FIGURA 6.9: Construcción de una trayectoria en el Plano de Fase

Ejemplo 6.28 La solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 2$ es (Ejemplo 6.26)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \sin 2t \\ 2e^{-t} \cos 2t \end{bmatrix}$$

La figura 6.9 muestra las gráficas de $x_1(t)$ vs t, $x_2(t)$ vs t, a partir de las cuales se ha trazado x_1 vs x_2 tomando para cada tiempo τ el valor de $x_1(\tau)$ y $x_2(\tau)$ y trasladándolos al plano de fase. La curva resultante es una trayectoria de la ecuación diferencial. La flecha roja indica el sentido en el que se recorre la trayectoria cuando el tiempo avanza.

Se ha repetido el procedimiento para varios juegos de condiciones iniciales, con el fin de obtener el retrato de fase que se muestra en la figura 6.10. Las condiciones iniciales seleccionadas han sido:

$$\mathbf{x}_a(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_c(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_d(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

La figura 6.11 muestra los retratos de fase típicos de sistemas lineales *estables*[4], mientras que la figura 6.12 muestra los retratos de fase típicos de los

[4]El *centro* se considera como un sistema marginalmente estable.

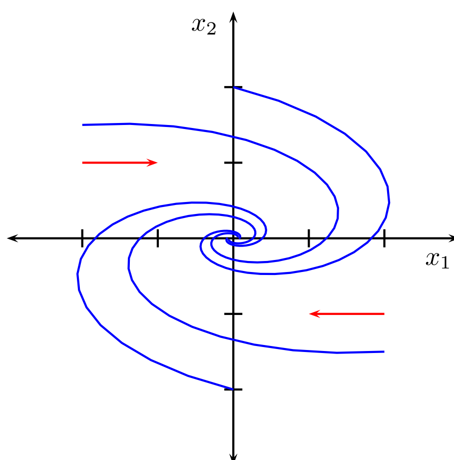


FIGURA 6.10: Retrato de fase

sistemas lineales *inestables*. Debemos resaltar que la forma de estos retratos depende de cómo son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

En general, un sistema lineal como (6.45) tendrá un retrato de fase semejante a alguno de los que se muestran en las figuras 6.11 y 6.12. No obstante, el retrato de fase no necesariamente será idéntico. La semejanza a la que nos referimos aquí consiste en una equivalencia de *forma* (serán *topológicamente equivalentes*).

Ejemplo 6.29 La figura 6.13 muestra los retratos de fase de varios ejemplos. En cada caso se ha anotado la matriz $\mathbf{A}$ y su forma canónica de Jordan $\mathbf{J}$. Nótese la semejanza de forma con los ejemplos típicos de las figuras 6.11 y 6.12.

En las figuras 6.11 y 6.12 se observa que el origen del plano de fase juega un papel importante, atrayendo o repeliendo todas las trayectorias (o siendo el *centro* de ellas en el caso especial en el que los valores propios son imaginarios puros).

El origen del plano de fase es el *punto de equilibrio* de (6.45), que definimos a continuación.

Definición 6.2 Punto de Equilibrio de Sistemas Continuos
$\bar{\mathbf{x}}$ es un *Punto de Equilibrio* de un sistema descrito por la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si derivada es cero, es decir, si $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Si la matriz $\mathbf{A}$ en (6.45) es no singular, el único punto de equilibrio de (6.45) es el origen del plano de fase. Lo anterior se demuestra al notar que un punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ es la solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, que tiene una única solución en $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es no singular.

Si la matriz $\mathbf{A}$ en (6.45) es singular pueden existir infinitos puntos de equilibrio, y los retratos de fase serán diferentes a los contemplados en las figuras 6.11 y 6.12. Estos casos no se considerarán en este curso.

Nombre	**Retrato**	**e-valores**	**Ejemplo**
Estable		Reales Negativos	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$	
Estable de multiplicidad 2		Reales Negativos Repetidos	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-t}$	
Sifón		Complejos de Parte Real Negativa	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-2t}\cos t + x_{20}e^{-2t}\sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{-2t}\sin t + x_{20}e^{-2t}\cos t$	
Centro		Imaginarios puros	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}\cos t + x_{20}\sin t$ $x_2(t) = -x_{10}\sin t + x_{20}\cos t$	

FIGURA 6.11: Retratos de fase estables típicos

Nombre	**Retrato**	**e-valores**	**Ejemplo**
Inestable		Reales Positivos	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{2t}$	
Inestable de multiplicidad 2		Reales Positivos Repetidos	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^{t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{t}$	
Fuente		Complejos de Parte Real Positiva	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{2t}\cos t + x_{20}e^{2t}\sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{2t}\sin t + x_{20}e^{2t}\cos t$	
Punto de Silla		Reales de Signo Diferente	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{t}$	

Figura 6.12: Retratos de fase inestables típicos

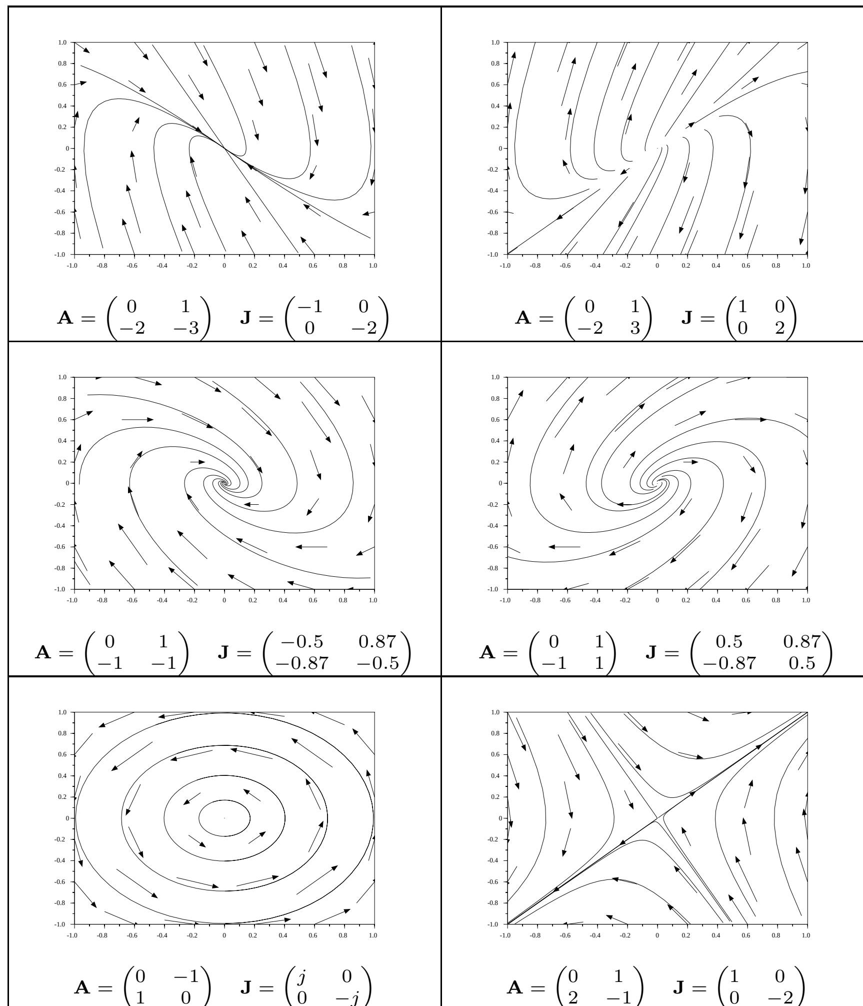


FIGURA 6.13: Ejemplos de retratos de fase

6.4.2. Espacio de estado

Dada una ecuación de la forma (6.36), podemos definir el conjunto formado por todas las soluciones de (6.36). Este conjunto forma un espacio vectorial conocido como el *espacio de estado*, tal como se especifica en el siguiente teorema.

Teorema 6.1 Dada una ecuación de la forma (6.36), el conjunto de todas las soluciones forma un espacio vectorial $\mathbf{\Sigma}$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales.

Demostración 6.1 El conjunto de todas las soluciones de (6.36) es un subconjunto del espacio vectorial formado por las funciones vectoriales continuas de orden n. Por lo tanto, sólo es necesario demostrar que el conjunto es cerrado bajo las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalar.

Supóngase dos funciones $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ que son solución de (6.36).

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) \qquad \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t)$$

Podemos multiplicar estas ecuaciones por cualesquiera escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y sumarlas

$$\alpha_1\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) \qquad \alpha_2\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}\left[\alpha_1\mathbf{x}_1(t) + \alpha_2\mathbf{x}_2(t)\right] = \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1(t) + \alpha_2\mathbf{x}_2(t))$$

Esta expresión demuestra que cualquier combinación lineal de soluciones de (6.36) es también una solución de (6.36), es decir, $\mathbf{\Sigma}$ es cerrada bajo la suma y el producto por escalar, y por lo tanto forma un espacio vectorial.

Los siguientes son algunos conceptos importantes asociados al Espacio de Estado. En todos los casos se ha supuesto que $\mathbf{A}$ es no singular y de tamaño $n \times n$:

Dimensión del Espacio de Estado: el espacio vectorial $\mathbf{\Sigma}$ tiene una dimensión igual al rango de la matriz $\mathbf{A}$ en (6.36). La dimensión de $\mathbf{\Sigma}$ es n.

Soluciones linealmente independientes: las soluciones de (6.36) dependen de las condiciones iniciales. Si se utilizan dos condiciones iniciales linealmente independientes, las soluciones que se obtienen también son linealmente independientes. Por el contrario, si se utilizan dos condiciones iniciales linealmente dependientes, las soluciones que se obtienen también son linealmente dependientes.

Base del espacio de estado: una base de $\mathbf{\Sigma}$ estará formada por n soluciones de (6.36) linealmente independientes. Denotemos estas funciones por:

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t)$$

Estas soluciones pueden obtenerse seleccionando n condiciones iniciales linealmente independientes.

Matriz Fundamental: una matriz $\Psi(t)$ que tenga n columnas formadas por n soluciones de (6.36) linealmente independientes se denomina una *Matriz Fundamental* de (6.36).

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \cdots & \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

Bases y vectores propios: si la matriz $\mathbf{A}$ en (6.36) tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces éstos pueden escogerse como el juego de n condiciones iniciales que se necesitan para construir una base de $\mathbf{\Sigma}$. Este cambio de base es equivalente a la obtención de la Forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 6.30 Supóngase el sistema dinámico

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

que es de la forma (6.36). Los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, y unos vectores propios asociados a ellos son:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de tal manera que la forma canónica de Jordan y la matriz modal son:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ es la siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t}) & (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}) \\ (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}) & (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

y por lo tanto la solución de la ecuación diferencial, para unas condiciones iniciales x_{10} y x_{20} es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_{10} + (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t})x_{20} \\ (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t})x_{10} + (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5x_{10} + 0.5x_{20}) + e^{-2t}(0.5x_{10} - 0.5x_{20}) \\ e^{-t}(0.5x_{10} + 0.5x_{20}) + e^{-2t}(-0.5x_{10} + 0.5x_{20}) \end{bmatrix}$$

El retrato de fase del sistema se muestra en la figura 6.14. Cada trayectoria del retrato de fase es una solución de la ecuación diferencial para unas ciertas condiciones iniciales. De esas trayectorias se destacan 2 que corresponden a líneas rectas. No es casualidad que esas trayectorias rectas coincidan con los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Veamos:

Si seleccionamos como condiciones iniciales las mismas coordenadas del vector propio $\mathbf{v}_1$, es decir, si hacemos $x_{10} = 1$ y $x_{20} = 1$ la solución de la ecuación será:

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5+0.5) + e^{-2t}(0.5-0.5) \\ e^{-t}(0.5+0.5) + e^{-2t}(-0.5+0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Es decir, se encuentra que $x_1(t) = x_2(t)$ lo que corresponde a una recta en el plano de fase. Además, la dinámica del sistema sólo depende de términos e^{-t}, es decir, sólo depende del valor propio λ_1 al cual está asociado $\mathbf{v}_1$. Al seleccionar como condición inicial un punto del primer vector propio, toda la dinámica del sistema depende exclusivamente del primer valor propio.

Un resultado similar obtendremos si seleccionamos como condiciones iniciales las mismas coordenadas del vector propio $\mathbf{v}_2$, es decir, si hacemos $x_{10} = 1$ y $x_{20} = -1$. La solución de la ecuación será:

$$\psi_2(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5-0.5) + e^{-2t}(0.5+0.5) \\ e^{-t}(0.5-0.5) + e^{-2t}(-0.5-0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Es decir, se encuentra que $x_1(t) = -x_2(t)$ lo que corresponde a otra recta en el plano de fase. Además, la dinámica del sistema sólo depende de términos e^{-2t}, es decir, sólo depende del valor propio λ_2 al cual está asociado $\mathbf{v}_2$. Al seleccionar como condición inicial un punto del segundo vector propio, toda la dinámica del sistema depende exclusivamente del segundo valor propio.

Hay otra forma de comprender estos resultados: supóngase que en algún instante (por ejemplo en $t = 0$) el vector de estado $\mathbf{x}$ es un vector propio del primer valor propio λ_1; su derivada podrá calcularse como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pero como es un vector propio, entonces $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$. En otras palabras, la derivada será un vector con la misma dirección de $\mathbf{x}$ y por lo tanto el sistema evolucionará en esa dirección, que es justamente la del vector propio.

Las dos soluciones que se han obtenido $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son linealmente independientes, y por lo tanto sirven como base del espacio de estado $\mathbf{\Sigma}$. Construimos la matriz fundamental

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Lo que se ha hecho es equivalente a efectuar un cambio de base en el plano de fase, tomando como nueva base la formada por los vectores propios. El nuevo retrato de fase se muestra en la figura 6.15.

6.4.3. Matriz de transición de estado

Definimos la *matriz de transición de estado* $\Phi(t_2, t_1)$ como la matriz que permite obtener el estado en el tiempo t_2 a partir del estado en el tiempo t_1 mediante la expresión [5]:

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) \tag{6.46}$$

[5] Una definición alternativa que es equivalente emplea la matriz fundamental: $\Phi(t_2, t_1) = \Psi(t_1)\Psi^{-1}(t_1)$

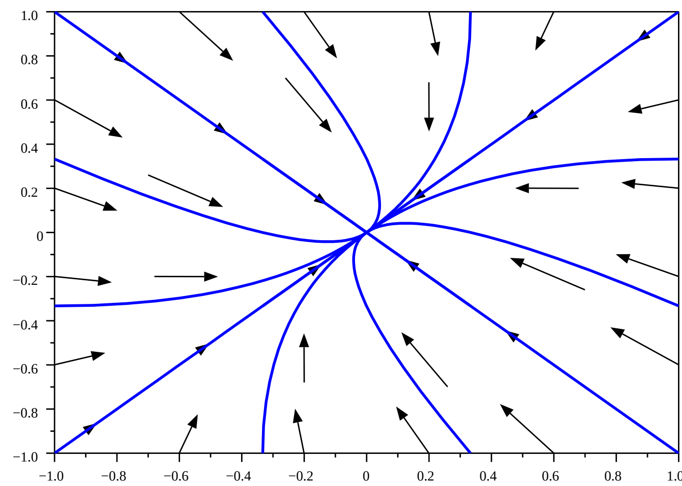


FIGURA 6.14: Retrato de fase de un ejemplo

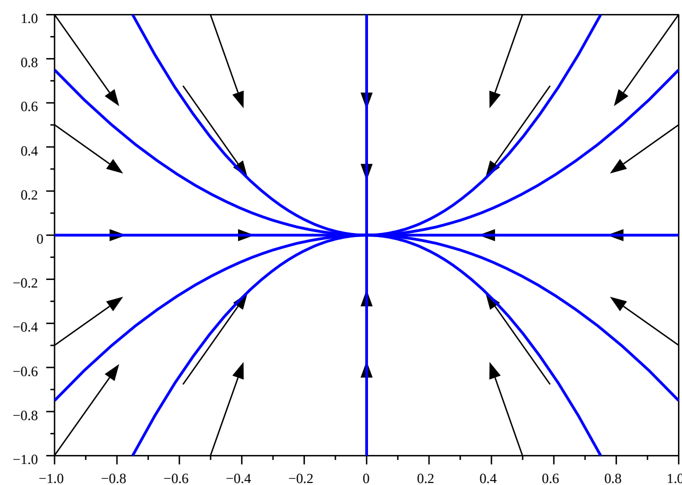


FIGURA 6.15: Retrato de fase de un ejemplo en la base de los vectores propios

Para un sistema como (6.36) es posible obtener $\Phi(t_2,t_1)$ calculando $\mathbf{x}(t_1)$ y $\mathbf{x}(t_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t_1) &= e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0)\\
\mathbf{x}(t_2) &= e^{\mathbf{A}t_2}\mathbf{x}(0)\\
\mathbf{x}(0) &= (e^{\mathbf{A}t_1})^{-1}\mathbf{x}(t_1) = e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1)\\
\mathbf{x}(t_2) &= e^{\mathbf{A}t_2}e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1)\\
\mathbf{x}(t_2) &= e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}\mathbf{x}(t_1)\\
\Phi(t_2,t_1) &= e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} \qquad (6.47)
\end{aligned}$$

6.5. Sistemas discretos libres

Abordamos ahora el análisis de la ecuación (6.22) con el sistema *libre* (sin entradas), es decir estudiamos la ecuación

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \qquad (6.48)$$

La ecuación matricial (6.48) recuerda la ecuación escalar

$$x(k+1) = ax(k)$$

cuya solución es

$$x(k) = x(0)a^k \qquad (6.49)$$

debido a que

$$a^{k+1} = aa^k \qquad x(0)a^0 = x(0) \qquad (6.50)$$

Al igual que en el caso continuo, nos preguntamos si al reemplazar el escalar a por la matriz $\mathbf{A}$, y la variable x por el vector de variables $\mathbf{x}$ se mantienen las relaciones (6.50) y así encontrar una solución de (6.48) similar a (6.49).

Evidentemente

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^k \qquad \mathbf{x}(0)\mathbf{A}^0 = \mathbf{x}(0) \qquad (6.51)$$

En consecuencia la solución de (6.48) es:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \qquad (6.52)$$

En (6.52) $\mathbf{x}(0)$ es el vector que contiene las condiciones iniciales de $\mathbf{x}(k)$. Por otra parte, es posible calcular $\mathbf{A}^k$ por diversos métodos, de los cuales destacamos los siguientes:

Definición: podemos emplear la definición de $\mathbf{A}^k$ directamente:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad k \text{ veces} \qquad (6.53)$$

Este método no es práctico, debido a la dificultad de calcular $\mathbf{A}^k$; sin embargo, en algunos casos especiales este cálculo es sencillo (matrices diagonales)

Forma canónica de Jordan: si se ha obtenido la Forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, entonces se tienen dos matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$ tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

y por lo tanto $\mathbf{A}^k$ puede calcularse así:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1} \tag{6.54}$$

La ventaja de emplear (6.54) radica en que $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, y por lo tanto $\mathbf{J}^k$ es más fácil de calcular, especialmente si $\mathbf{J}$ es completamente diagonal

Transformada $\mathcal{Z}$: podemos obtener la solución de (6.48) empleando la transformada $\mathcal{Z}$, y así deducir el valor de $\mathbf{A}^k$.

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{x}(k+1)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}\mathbf{x}(k)\right\} =$$

$$z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z)$$
$$z\mathbf{x}(z) - \mathbf{A}\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0)$$
$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{x}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{x}(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)\right\}$$
$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \tag{6.55}$$

Jordan y transformada $\mathcal{Z}$: pueden combinarse (6.54) y (6.55) para obtener:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1}\right\}\mathbf{M}^{-1} \tag{6.56}$$

6.5.1. Matriz de transición de estado

Definimos la *Matriz de Transición de Estado* $\Phi(k_2, k_1)$ como la matriz que permite obtener el estado en el tiempo k_2 a partir del estado en el tiempo k_1 mediante la expresión

$$\mathbf{x}(k_2) = \Phi(k_2, k_1)\mathbf{x}(k_1) \tag{6.57}$$

Para un sistema como (6.48) es posible obtener $\Phi(k_2, k_1)$ calculando $\mathbf{x}(k_1)$ y $\mathbf{x}(k_2)$:

$$\mathbf{x}(k_1) = \mathbf{A}^{k_1}\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{k_2}\mathbf{x}(0)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) = (\mathbf{A}^{k_1})^{-1}\mathbf{x}(k_1) = \mathbf{A}^{-k_1}\mathbf{x}(k_1) \\
\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{k_2}\mathbf{A}^{-k_1}\mathbf{x}(k_1) \\
\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{(k_2-k_1)}\mathbf{x}(k_1) \\
\Phi(k_2, k_1) = \mathbf{A}^{(k_2-k_1)}
\end{aligned}
$$

6.6. Sistemas continuos excitados

Estudiamos ahora el sistema continuo con excitación, es decir el sistema descrito por (6.58)

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

Para ello, aplicamos transformada de Laplace a cada lado de las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\
\mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)
\end{aligned}
\tag{6.59}
$$

En la primera ecuación podemos despejar $\mathbf{x}(s)$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \tag{6.60}$$

Ahora podemos incorporar (6.60) en la segunda ecuación de (6.59)

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{y}(s) = \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{Rta de entrada cero}} + \underbrace{\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s)}_{\text{Rta de estado cero}} \tag{6.61}$$

En (6.61) se observa que la respuesta $\mathbf{y}(s)$ tiene dos componentes[6]:

Respuesta de estado cero: es la primera parte de la ecuación (6.61). Depende de las entradas $\mathbf{u}(s)$ y no de las condiciones iniciales; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las condiciones iniciales son cero, es decir, si su estado inicial es cero (de allí su nombre).

Respuesta de entrada cero: es la segunda parte de la ecuación (6.61). Depende de las condiciones iniciales y no de las entradas $\mathbf{u}(s)$; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las entradas son cero (de allí su nombre).

[6]Compárese con las definiciones de la página 45 para sistemas de una entrada y una salida.

6.6.1. Matriz de funciones de transferencia

Si se consideran condiciones iniciales nulas, la ecuación (6.61) se convierte en

$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s)$$

Podemos definir la *Matriz de Funciones de Transferencia* como la matriz que relaciona las entradas y las salidas, cuando las condiciones iniciales son nulas:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)|_{C.I.=0} \qquad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \tag{6.62}$$

La matriz $\mathbf{G}(s)$ en (6.62) es una matriz $q \times p$ (p entradas y q salidas):

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

El elemento $G_{ij}(s)$ de la matriz $\mathbf{G}(s)$ muestra cómo afecta la entrada $u_j(s)$ a la salida $y_i(s)$.

En general, una entrada $u_j(s)$ afectará a todas las salidas $y(s)$. No obstante, existe un caso especial en que esto no es así: supóngase que existe el mismo número de entradas que de salidas p, y que la matriz de funciones de transferencia es diagonal:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{pp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

En este caso especial, la entrada $u_j(s)$ sólo afecta la salida $y_j(s)$. Se dice entonces que el sistema es *desacoplado*.

6.6.2. Variables de estado en el tiempo

Podemos obtener el comportamiento en el tiempo de las variables de estado aplicando la transformada inversa de Laplace a (6.60)

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{x}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\right]$$

La primera de las transformadas corresponde a $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t,0)$ como puede verse en (6.43) y (6.47). Nótese que la segunda transformada incluye el producto de dos funciones de s. El resultado es:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6.63}$$

En la sección 6.7.2 buscaremos aproximarnos a una interpretación de (6.63) apoyándonos en el caso discreto.

6.7. Sistemas discretos excitados

Estudiamos ahora el sistema discreto con excitación, es decir el sistema descrito por (6.64)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{6.64}$$

Para ello, aplicamos transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de las ecuaciones

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z) \end{aligned} \tag{6.65}$$

En la primera ecuación podemos despejar $\mathbf{x}(z)$

$$z\mathbf{x}(z) - \mathbf{A}\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

$$\mathbf{x}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z) \tag{6.66}$$

Ahora podemos incorporar (6.66) en la segunda ecuación de (6.65)

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\right] + \mathbf{D}\mathbf{u}(z)$$

$$\mathbf{y}(z) = \underbrace{\mathbf{C}z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{Rta de entrada cero}} + \underbrace{\left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(z)}_{\text{Rta de estado cero}} \tag{6.67}$$

De forma análoga al caso continuo, (6.67) muestra que la respuesta $\mathbf{y}(z)$ tiene dos componentes[7]:

Respuesta de estado cero: es la primera parte de la ecuación (6.67). Depende de las entradas $\mathbf{u}(z)$ y no de las condiciones iniciales; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las condiciones iniciales son cero, es decir, si su estado inicial es cero (de allí su nombre).

Respuesta de entrada cero: es la segunda parte de la ecuación (6.67). Depende de las condiciones iniciales y no de las entradas $\mathbf{u}(z)$; de hecho, es la respuesta que tiene el sistema si las entradas son cero (de allí su nombre).

[7] Compárese con las definiciones de la página 46 para sistemas de una entrada y una salida.

6.7.1. Matriz de funciones de transferencia

Si se consideran condiciones iniciales nulas, la ecuación (6.67) se convierte en

$$\mathbf{y}(z) = \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(z)$$

Podemos definir la *Matriz de Funciones de Transferencia* como la matriz que relaciona las entradas y las salidas, cuando las condiciones iniciales son nulas:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(z)|_{C.I.=0} \qquad \mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{6.68}$$

La matriz $\mathbf{G}(z)$ en (6.68) es una matriz $q \times p$ (p entradas y q salidas):

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \cdots & G_{1p}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \cdots & G_{2p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(z) & G_{q2}(z) & \cdots & G_{qp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_p(z) \end{bmatrix}$$

El elemento $G_{ij}(z)$ de la matriz $\mathbf{G}(z)$ muestra cómo afecta la entrada $u_j(z)$ a la salida $y_i(z)$.

En general, una entrada $u_j(z)$ afectará a todas las salidas $y(z)$. No obstante, existe un caso especial en que esto no es así: supóngase que existe el mismo número de entradas que de salidas p, y que la matriz de funciones de transferencia es diagonal:

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{pp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_p(z) \end{bmatrix}$$

En este caso especial, la entrada $u_j(z)$ sólo afecta la salida $y_j(z)$. Se dice entonces que el sistema es *desacoplado*.

6.7.2. Variables de estado en el tiempo

Podemos obtener el comportamiento en el tiempo de las variables de estado aplicando la transformada inversa $\mathcal{Z}$ a (6.66)

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\mathbf{x}(z)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\right]$$

La primera de las transformadas corresponde a $\mathbf{A}^k = \Phi(k, 0)$ como puede verse en (6.55) y (6.57). Nótese que la segunda transformada incluye el producto de dos funciones de z. El resultado es:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi(k, l+1)\mathbf{B}\mathbf{u}(l) \tag{6.69}$$

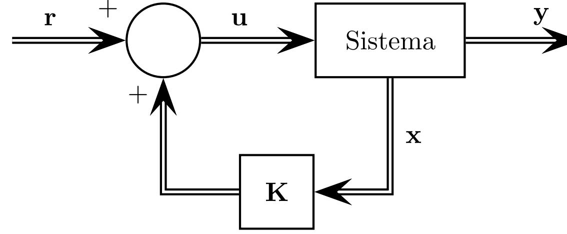


FIGURA 6.16: Realimentación por variable de estado

Las ecuaciones (6.63) y (6.69) son análogas; sin embargo, es más fácil de analizar (6.69). Para ello, vamos a expandir la sumatoria:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0) + \Phi(k,1)\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \Phi(k,2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \cdots + \Phi(k,k)\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0) + \Phi(k,1)\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \Phi(k,2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \cdots + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (6.70)$$

La ecuación (6.70) muestra que $\mathbf{x}(k)$ está formada por aportes de las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, y de las entradas $\mathbf{u}(k)$. Además muestra cuál es el aporte exacto del valor de la entrada en un instante de tiempo específico: por ejemplo, la entrada en $k = 1$, que es $\mathbf{u}(1)$ aporta a la construcción de $\mathbf{x}(k)$ justamente $\Phi(k,2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1)$.

Un análisis similar podría hacerse para el caso continuo con la ecuación (6.63); para ello debe emplearse la función impulso $\delta(t-\tau)$. Debido a que este análisis no aporta ningún concepto nuevo, se ha omitido en este texto.

6.8. Introducción al control por variable de estado

El esquema básico de control por variable de estado se muestra en la figura 6.16. La estrategia, que es igualmente válida para sistemas continuos y discretos consiste en utilizar las variables de estado $\mathbf{x}$ para realimentar el sistema mediante una matriz $\mathbf{K}$, y comparar el estado con unas señales de referencia $\mathbf{r}$, de donde se tiene que

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (6.71)$$

Para que (6.71) tenga sentido, las dimensiones de las variables involucradas deben ser las siguientes:

$$\mathbf{u}_{p\times 1} = \mathbf{r}_{p\times 1} + \mathbf{K}_{p\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}$$

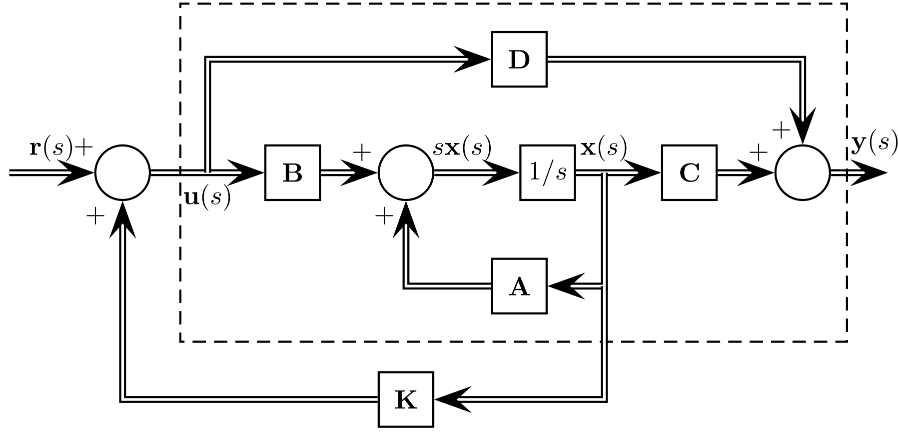


FIGURA 6.17: Realimentación por variable de estado de un sistema continuo

Podemos emplear los diagramas de bloques de la representación en variable de estado para sistemas continuos y discretos que se muestran en las figuras 6.5 y 6.6 para complementar la figura 6.16. El resultado se muestra en las figuras 6.17 y 6.18.

Combinando las ecuaciones (6.21) y (6.22) con (6.71) se obtienen las ecuaciones de estado para sistemas continuos y discretos con realimentación por variable de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t)] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}[\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}[\mathbf{r}(k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k)] \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}[\mathbf{r}(k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k)] \end{cases}$$

que pueden reescribirse como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{r}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{r}(k) \\ \mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{r}(k) \end{cases}$$

Se obtienen entonces unos nuevos sistemas para los que las entradas son $\mathbf{r}$, las salidas son $\mathbf{u}$ y las variables de estado son $\mathbf{x}$ (ver figura 6.16). Si definimos $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ y $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K}$ las ecuaciones de estos nuevos sistemas serán:

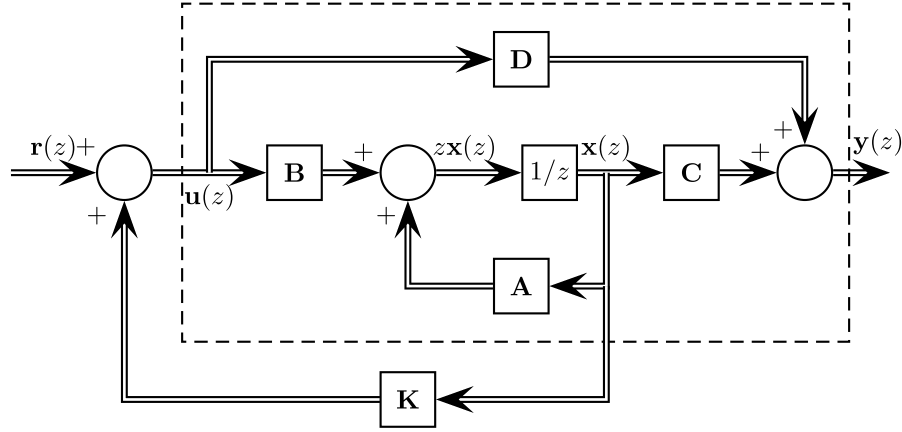


Figura 6.18: Realimentación por variable de estado de un sistema discreto

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) & \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BK} \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{r}(t) & \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{DK} \end{cases} \tag{6.72}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{r}(k) & \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BK} \\ \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{r}(k) & \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{DK} \end{cases} \tag{6.73}$$

Dado que el comportamiento de los sistemas descritos por (6.72) y (6.73) dependen de los valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$, se desprende que la estrategia de control por variable de estado consiste en establecer un sistema como el de la figura 6.16 y seleccionar una matriz $\mathbf{K}$ tal que los valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$ en (6.72) y (6.73) sean los deseados.

Como éste no es un texto de control, no abordaremos el problema de cómo obtener esa matriz $\mathbf{K}$. Sin embargo, resaltamos que esta estrategia plantea al menos dos interrogantes:

1. ¿Pueden asignarse con total libertad los valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$?, es decir, dado un conjunto de valores propios deseados, ¿existirá siempre una matriz $\mathbf{K}$ que permita asignarle a $\bar{\mathbf{A}}$ dichos valores propios?

2. Dado que las variables de estado no necesariamente tienen sentido físico, y en caso de tenerlo no necesariamente son medibles, ¿Cómo pueden conocerse los valores de las variables de estado para implementar el esquema de la figura 6.16?

Las secciones 6.8.1 y 6.8.2 intentan dar respuesta a estas preguntas.

6.8.1. Controlabilidad

La noción de *controlabilidad* de un sistema está asociada con la posibilidad de hacer que sus variables de estado tomen cualquier valor deseado, no importa cuáles sean las condiciones iniciales, en un tiempo finito.

Definición 6.3 Controlabilidad
Un sistema dinámico es *controlable* en t_1 si para cualquier estado $\mathbf{x}(t_1)$ y cualquier estado deseado $\mathbf{x}_d$ es posible encontrar una entrada $\mathbf{u}(t)$ que aplicada entre t_1 y t_2 produce $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_d$, con $t_2 < \infty$

Ejemplo 6.31 Considérese el circuito de la figura 6.19, en el que la variable de entrada es $v(t)$ y la variable de salida es $v_x(t)$. Es claro que para escribir las ecuaciones de estado de ese circuito podemos escoger como variable de estado la tensión en el condensador $v_C(t)$.

Debido a la simetría del circuito, si las condiciones iniciales son nulas ($v_C(0) = 0$), la tensión en el condensador siempre será cero, sin importar qué valor tome la fuente $v(t)$. Por lo tanto, no es posible modificar a nuestro antojo el valor de la variable de estado, y en consecuencia el sistema es *no controlable*.

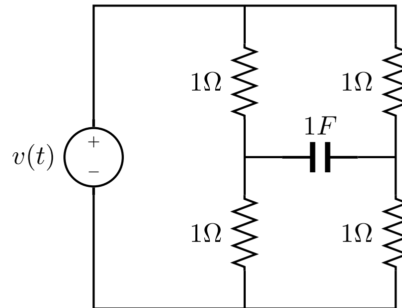


FIGURA 6.19: Circuito

La definición 6.3 no brinda por sí sola un mecanismo fácil para determinar si un sistema es controlable o no. No obstante, podemos aplicar un *test de controlabilidad* para determinar si un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo es o no controlable.

Test de controlabilidad

Para determinar si un sistema como (6.21) o como (6.22) es o no controlable, con $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y $\mathbf{B}$ una matriz $n \times p$, se construye la *matriz de controlabilidad* $\mathbf{V}$ y se verifica su rango:

$$\begin{gathered}\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \\ \textit{El sistema es controlable si y sólo si } \operatorname{rank}(\mathbf{V}) = n\end{gathered} \tag{6.74}$$

Anotaciones al concepto de Controlabilidad

1. La definición 6.3 es realmente la definición de *controlabilidad de estado*, dado que se refiere a la posibilidad de obtener cualquier estado. Existe una definición semejante para la *controlabilidad de salida*, que no se aborda en este texto.

2. El test de controlabilidad (6.74) pone de manifiesto que la controlabilidad sólo depende de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, es decir, sólo depende de la ecuación de estado y no de la ecuación de salida.

3. Para determinar la controlabilidad de un sistema como(6.21) no es necesario resolver la ecuación diferencial. Se realiza un *análisis cualitativo* de la ecuación.

4. Si un sistema es controlable, entonces con un esquema de control por realimentación de variable de estado como el de la figura 6.16 siempre es posible encontrar una matriz $\mathbf{K}$ real para que la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ en (6.72) o en (6.73) tenga los valores propios deseados[8].

5. El test es igualmente válido para sistemas continuos y discretos.

6.8.2. Observabilidad

Al observar la estrategia de control por Realimentación de Variable de Estado sugerida en la figura 6.16 surge la cuestión de cómo medir las variables de estado $\mathbf{x}$, ya que es posible que éstas no tengan sentido físico, o que no sean medibles.

Para solucionar este problema se plantea la utilización de un *estimador de estado*, u *observador de estado*, que es un elemento que intenta estimar el estado del sistema a partir de mediciones de las entradas y salidas al sistema (se supone que éstas sí tienen sentido físico y son medibles), tal como se observa en la figura 6.20, en la que $\hat{\mathbf{x}}$ es la estimación que el observador hace del estado $\mathbf{x}$.

La noción de *observabilidad* de un sistema está asociada con la posibilidad de determinar el estado del sistema a partir de mediciones de sus entradas y salidas durante un tiempo finito, es decir, con la posibilidad de construir un observador.

Definición 6.4 Observabilidad
Un sistema dinámico es *observable* en t_1 si es posible conocer el estado $\mathbf{x}(t_1)$ a partir de mediciones de las entradas $\mathbf{u}(t)$ y las salidas $\mathbf{y}(t)$ durante el periodo comprendido entre t_1 y t_2, con $t_2 < \infty$

[8]Se supone en esta afirmación que los valores propios deseados complejos aparecen en parejas conjugadas.

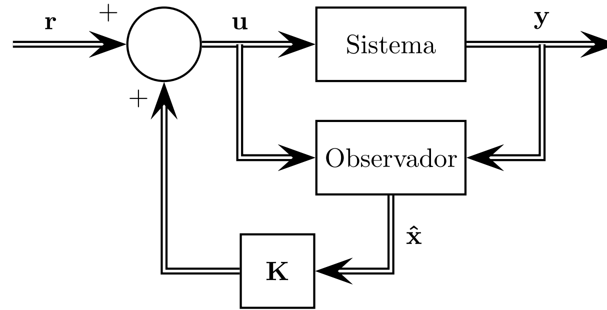


FIGURA 6.20: Realimentación por variable de estado con observador

Ejemplo 6.32 Considérese nuevamente el circuito de la figura 6.19, en el que la variable de entrada es $v(t)$, la variable de salida es $v_x(t)$ y la variable de estado la tensión en el condensador $v_C(t)$.

Es claro que a partir de mediciones de $v(t)$ y $v_x(t)$ (que son iguales) no es posible conocer las condiciones iniciales del condensador y en consecuencia el sistema es *no observable*.

La definición 6.4 no brinda por sí sola un mecanismo fácil para determinar si un sistema es observable o no. No obstante, podemos aplicar un *test de observabilidad* para determinar si un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo es o no observable.

Test de observabilidad

Para determinar si un sistema como (6.21) o como (6.22) es o no observable, con $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y $\mathbf{C}$ una matriz $q \times n$, se construye la *matriz de observabilidad* $\mathbf{S}$ y se verifica su rango:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \textit{El sistema es observable si y sólo si } \operatorname{rank}(\mathbf{S}) = n \tag{6.75}$$

Anotaciones al concepto de observabilidad

1. El test de observabilidad (6.75) pone de manifiesto que la controlabilidad sólo depende de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.

2. Para determinar la observabilidad de un sistema como(6.21) no es necesario resolver la ecuación diferencial. Se realiza un *análisis cualitativo* de la ecuación.

3. Si un sistema es observable, entonces puede construirse un observador como el que se sugiere en la figura 6.20. En este texto no se aborda el problema de cómo construir dicho observador.

4. El test es igualmente válido para sistemas continuos y discretos.

Ejemplo 6.33 Tomemos nuevamente el circuito de la figura 6.19. Para escribir las ecuaciones que rigen el sistema, nótese que el equivalente Thévenin del circuito visto por el condensador es una resitencia de valor R, de tal manera que:

$$v_C = -Ri_C = -RC\frac{d\,v_C}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = -\frac{1}{RC}v_C(t)$$

La ecuación de salida es trivial:

$$v_x(t) = v(t)$$

De tal manera que la representación en variable de estado para el circuito es:

$$\begin{cases} \dot{v}_C = -\frac{1}{RC}v_C \\ v_x = v(t) \end{cases}$$

Es decir, es un sistema como (6.21) con $\mathbf{A} = -1/RC$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$, y $\mathbf{D} = 1$. Las matrices de controlabilidad y observabilidad definidas en (6.74) y (6.75) son:

$$\mathbf{V} = [0] \qquad \mathbf{S} = [0]$$

y por lo tanto tienen rango 0, lo que significa que el sistema es no controlable y no observable.

Capítulo 7

Introducción a los sistemas no lineales

Si bien el objetivo de este curso es el análisis de los sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo, en este capítulo se hace una breve presentación de los *sistemas no lineales*, con el propósito principal de resaltar:

- Que los resultados y las técnicas presentadas en capítulos anteriores tienen una aplicabilidad limitada a los sistemas lineales.
- Que el comportamiento de los sistemas lineales es limitado a un cierto tipo de respuestas, mientras que los sistemas no lineales pueden tener un comportamiento de mayor riqueza.

Para ello, hacemos inicialmente una distinción entre dos tipos de funciones no lineales:

No linealidades estáticas: se trata de sistemas no lineales *sin memoria*, es decir, aquellos cuyas salidas $y(t)$ sólo dependen de las entradas en ese mismo instante $u(t)$. La figura 7.1 resume algunas de las no linealidades estáticas más frecuentes. Algunos de los elementos que se pueden modelar con este tipo de no linealidades estáticas son:

- Válvulas de apertura gradual.
- Transformadores y motores en regiones de saturación magnética.
- Materiales ferromagnéticos en general.
- Huelgos en engranajes.
- Cilindros hidráulicos y neumáticos con cambio de dirección.
- Linealizaciones de elementos eléctricos y electrónicos.

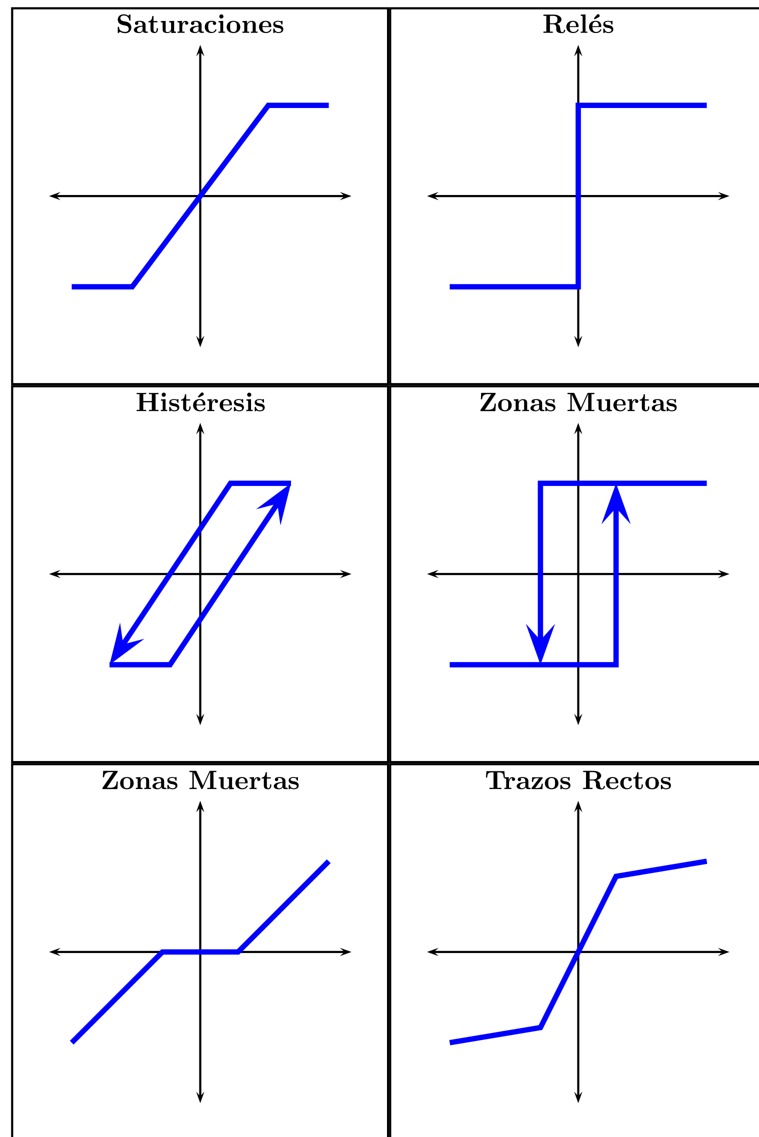


FIGURA 7.1: No linealidades estáticas más frecuentes

No linealidades dinámicas: se trata de sistemas no lineales *con memoria*, es decir, aquellos cuyas salidas $y(t)$ dependen no sólo de las entradas en ese mismo instante $u(t)$, sino también de sus derivadas o diferencias finitas. Es decir, consideramos ecuaciones diferenciales y de diferencia de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \qquad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

En donde el vector $\mathbf{u}$ contiene las entradas al sistema, $\mathbf{x}$ las variables de estado, y $\mathbf{f}$ es una función vectorial no lineal (no necesariamente lineal). Las secciones 7.1 a 7.8 se refieren a este tipo de no linealidades.

7.1. Pérdida de superposición y proporcionalidad

Las propiedades de *superposición* y *proporcionalidad* son inherentes a los sistemas lineales. Estas dos propiedades se pierden en los sistemas no lineales.

Ejemplo 7.1 Consideremos un sistema continuo descrito por la ecuación (7.1) que no es lineal debido al término x^2

$$\dot{x} + \varepsilon x^2 = u(t) \tag{7.1}$$

En la figura 7.2 se muestra el comportamiento del sistema con $\varepsilon = 1$ y condiciones iniciales nulas ante dos entradas diferentes:

- Se ha simulado la salida $y_1(t)$ con una entrada $u_1(t) = \mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_2(t)$ con una entrada $u_2(t) = 4\mu(t)$.

Nótese que aunque se ha multiplicado por 4 la entrada, la salida no está multiplicada por 4; de hecho, el valor estacionario tan sólo se ha duplicado, con lo que se demuestra que el sistema no tiene la propiedad de proporcionalidad.

Ahora trabajamos con el sistema suponiendo $\varepsilon = 0.1$ (es decir, haciendo más pequeño el efecto no lineal) y manteniendo condiciones iniciales nulas. Se ha simulado el comportamiento del sistema en tres condiciones diferentes:

- Se ha simulado la salida $y_3(t)$ con una entrada $u_3(t) = \mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_4(t)$ con una entrada $u_4(t) = \sin(t)\mu(t)$.
- Se ha simulado la salida $y_5(t)$ con una entrada $u_5(t) = \mu(t) + \sin(t)\mu(t)$.

La figura 7.3 muestra $y_3(t)$, $y_4(t)$, $y_3(t) + y_4(t)$ y $y_5(t)$. Se destaca cómo la suma $y_3(t) + y_4(t)$ es diferente de la salida que se obtiene cuando la entrada es $u_3(t) + u_4(t)$, con lo que se demuestra que el sistema no tiene la propiedad de superposición.

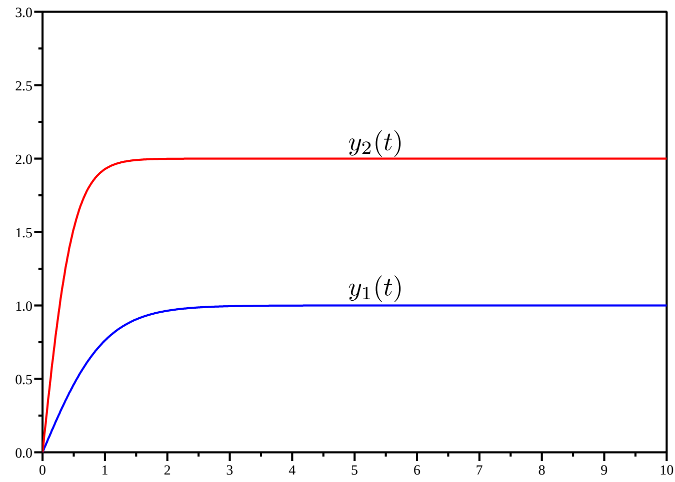


Figura 7.2: Sistema no lineal con dos entradas escalón

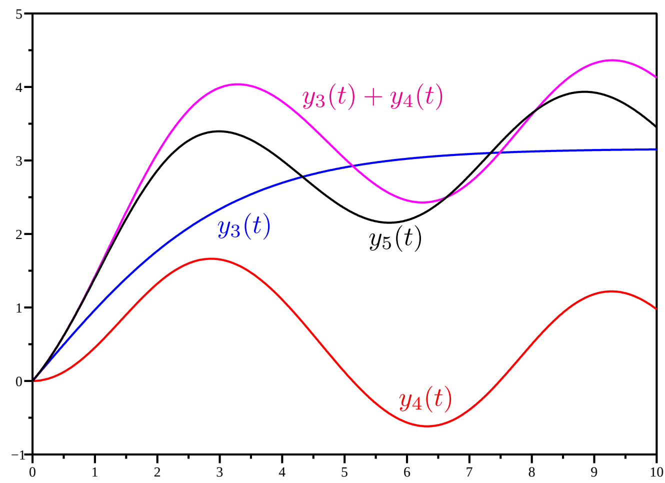


Figura 7.3: Sistema no lineal con una entrada escalón y una sinusoide

7.2. Múltiples puntos de equilibrio

Un punto de equilibrio de un sistema continuo es un punto $\mathbf{x}_0$ tal que $\dot{\mathbf{x}}(t)$ en ese punto valga cero, ya que en esas condiciones el sistema no cambiará nunca de estado.

Por otra parte, un punto de equilibrio de un sistema discreto es un punto $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$ en ese punto valga cero, ya que en esas condiciones el sistema no cambiará nunca de estado.

Si consideramos un sistema continuo lineal libre de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, es claro que el único punto de equilibrio que existe[1] corresponde a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sin embargo, pueden existir sistemas no lineales con más de un punto de equilibrio.

Ejemplo 7.2 Tomemos como ejemplo un *péndulo simple* de barra rígida como el de la figura 7.4 cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1) - bx_2\end{aligned} \tag{7.2}$$

en donde

- x_1 representa el ángulo de giro del péndulo medido respecto a la vertical en el punto de giro.
- x_2 representa la velocidad angular.
- $a = g/l$, $b = k/m$.
- g es la aceleración de la gravedad.
- l es la distancia del punto de giro al centro de gravedad del péndulo.
- k es el coeficiente de fricción viscosa del punto de giro.
- m es la masa del péndulo.

Para que $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ sean cero en (7.2) se necesita que $x_2 = 0$ y $\sin(x_1) = 0$, es decir que los puntos de equilibrio son:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\pm\pi\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\pm 2\pi\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\pm 3\pi\\0\end{bmatrix}, \cdots$$

Este resultado corresponde a nuestra experiencia: el péndulo está en reposo sólo en dirección vertical, bien sea hacia arriba o hacia abajo; si está hacia abajo el ángulo x_1 es 0 (que es igual a $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$) y si está hacia arriba el ángulo x_1 es π (que es igual a $-\pi, \pm 3\pi, \cdots$), y en ambos casos la velocidad angular x_2 es 0.

Para mostrar gráficamente la presencia de varios puntos de equilibrio se ha trazado el retrato de fase del péndulo simple en la figura 7.5 con $a = b = 1$.

[1] Salvo en los casos especiales en que $\mathbf{A}$ es singular.

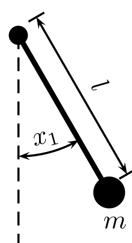


Figura 7.4: Diagrama del péndulo simple

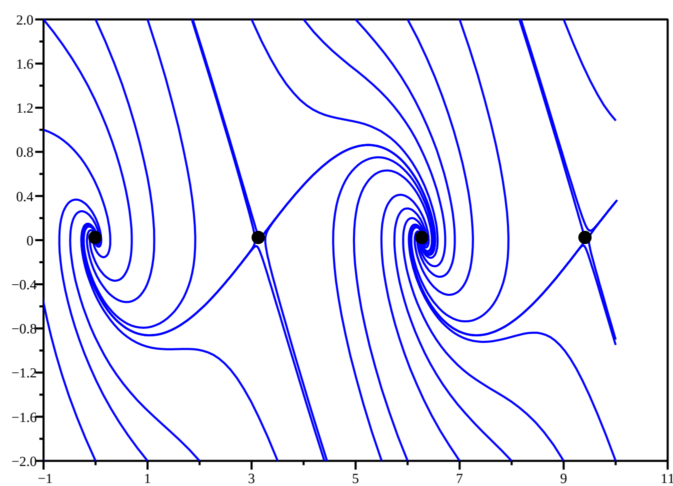


Figura 7.5: Retrato de fase del péndulo simple con $a = b = 1$

7.3. Estabilidad local

El concepto de *estabilidad* está asociado con los *puntos de equlibrio*, es decir se dice que un punto de equilibrio puede tener un cierto tipo de estabilidad (ser estable, inestable, un punto de silla, etc.).

Como los sistemas lineales sólo tienen un punto de equilibrio, se dice que la estabilidad del sistema es la de ese punto de equilibrio. Debido a que los sistemas no lineales pueden tener más de un punto de equilibrio, ya no es válido hablar de la *estabilidad del sistema* como un todo, sino que es necesario estudiar la *establidad de cada punto de equilibrio.* A este tipo de estabilidad se le denomina *estabilidad local*.

Ejemplo 7.3 Consideremos de nuevo el caso del péndulo simple descrito por (7.2) y cuyo retrato de fase se muestra en la figura 7.5. Para conocer el comportamiento del sistema en todos los puntos de equilibrio basta con analizarlo en dos de ellos (un ángulo θ es igual a un ángulo $\theta \pm 2n\pi$):

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

La figura 7.6 muestra una ampliación del retrato de fase de la figura 7.5 cerca al punto de equilibrio $\mathbf{x}_a$. El retrato de fase resultante es similar al de un *sifón* de un sistema lineal, por lo tanto diremos que $\mathbf{x}_a$ es un punto de equilibrio del tipo sifón, y por lo tanto estable.

Por otra parte, la figura 7.7 muestra una ampliación del retrato de fase de la figura 7.5 cerca al punto de equilibrio $\mathbf{x}_b$. El retrato de fase resultante es similar al de un *punto de silla* de un sistema lineal, por lo tanto diremos que $\mathbf{x}_b$ es un punto de equilibrio del tipo punto de silla, es decir, es inestable.

7.4. Órbitas periódicas no sinusoidales

En un sistema lineal la única posibilidad de tener soluciones periódicas se da cuando los valores propios son imaginarios puros; en estos casos las trayectorias del retrato de fase son elipses y se denominan *órbitas cerradas* del sistema.

En los sistemas no lineales hay otras posibilidades de tener soluciones periódicas, que no necesariamente corresponderán a elipses en los retratos de fase.

Ejemplo 7.4 Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones de *Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1 x_2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

La ecuación (7.3) sirve como un modelo simplificado para predecir el crecimiento de las poblaciones de dos especies en un ámbito cerrado en la que una de ellas es el predador de la otra (la presa). x_1 representa la población del predador y x_2 la

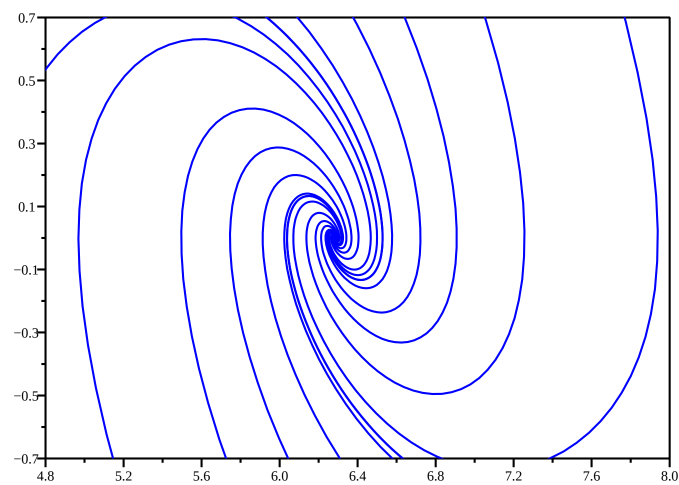


Figura 7.6: Retrato de fase del péndulo simple alrededor de un punto de equilibrio del tipo sifón

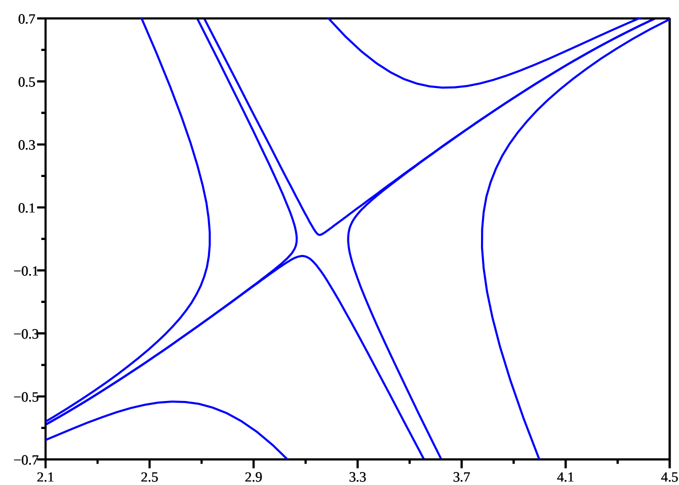


Figura 7.7: Retrato de fase del péndulo simple alrededor de un punto de equilibrio del tipo punto de silla

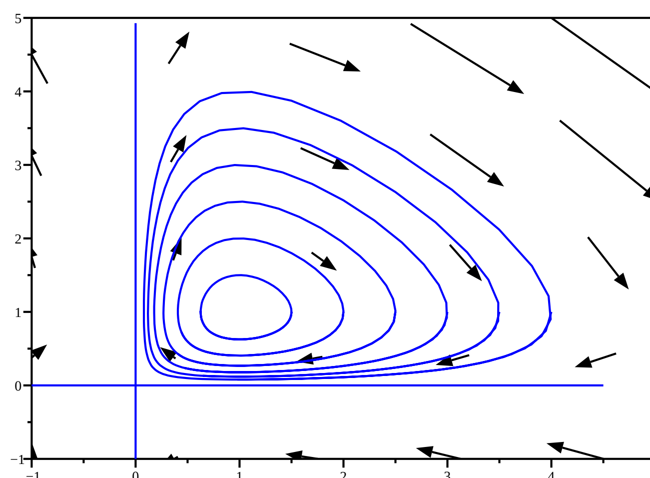


FIGURA 7.8: Retrato de fase del sistema de Lotka-Volterra

de la presa. La variación de la población está afectada por cuántas veces se cruzan miembros de una especie con los de la otra, que se supone que es proporcional al producto x_1x_2.

La figura 7.8 muestra el retrato de fase del sistema descrito por (7.3). Se nota un punto de equilibrio en $(1,1)$ que es un centro, y otro punto de equilibrio en $(0,0)$ que es un punto de silla. Además, se destacan infinitas soluciones periódicas que no tienen forma de elipse ni están centradas en $(0,0)$

7.5. Ciclos límite

En ocasiones las trayectorias del sistema tienden a formar una órbita cerrada; cuando esto sucede se dice que existe un *ciclo límite estable*. También se da el caso en el que las trayectorias se desprenden de una órbita cerrada, en cuyo caso se dice que existe un *ciclo límite inestable*.

Ejemplo 7.5 Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \mu(1-x_1^2)x_2 - x_2 \end{array} \tag{7.4}$$

La ecuación (7.4) representa al *Oscilador de Van der Pol*, un oscilador con un amortiguamiento no lineal en el término proporcional a $x_1^2x_2$.

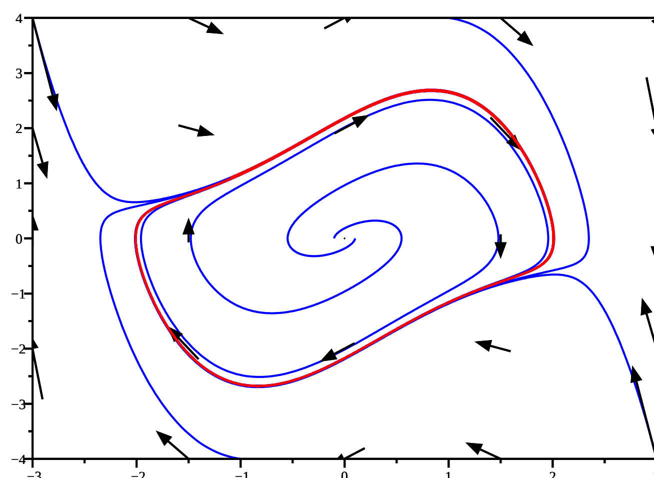


Figura 7.9: Retrato de fase del oscilador de Van der Pol con $\mu = 1$

La figura 7.9 muestra el retrato de fase del sistema descrito por (7.4) con $\mu = 1$. Nótese que todas las trayectorias tienden a formar una órbita cerrada (marcada en rojo); esta órbita corresponde a un *ciclo límite* del sistema.

7.6. Órbitas homoclínicas

En un sistema lineal, cuando el punto de equilibrio es del tipo punto de silla, una trayectoria que inicie en el vector propio inestable viajará por ese vector hasta el infinito.

En algunos sistemas no lineales puede darse un comportamiento especial: una trayectoria que inicie en un punto de equilibrio del tipo punto de silla puede llegar a terminar en el mismo punto de equilibrio. Cuando esto sucede, la trayectoria descrita se denomina una *órbita homoclínica*

Ejemplo 7.6 Supóngase un sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 + x_1 - x_1^3 \end{aligned} \tag{7.5}$$

La ecuación (7.5) representa al *Oscilador de Duffing*, y corresponde a un oscilador con una excitación adicional; por ejemplo, (7.5) puede representar a un péndulo

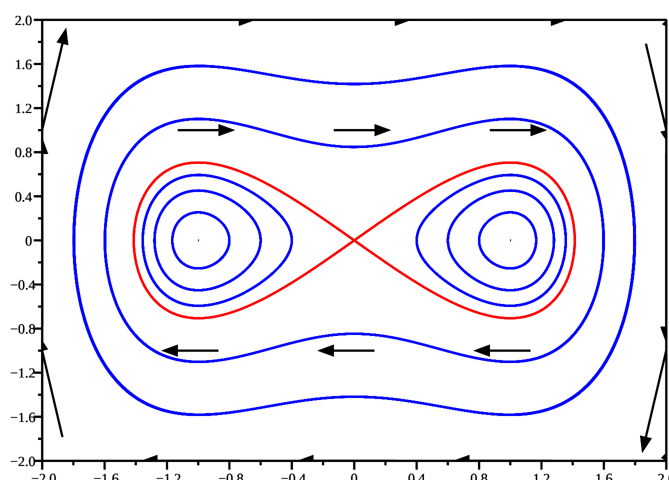


FIGURA 7.10: Retrato de fase del oscilador de Duffing con $k = 0$

simple como el de la figura 7.4 cuando el ángulo es pequeño, y adicionalmente se ejerce una fuerza proporcional a x_1^3.

La figura 7.10 muestra el retrato de fase del sistema descrito por (7.5) con $k = 0$ (sin amortiguamiento). El sistema tiene tres puntos de equilibrio: en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$ hay unos puntos de equilbrio del tipo centro; en $(0, 0)$ hay un punto de equilibrio del tipo punto de silla.

En este punto hay dos trayectorias especiales (en rojo): una de ellas inicia en la dirección $(1, 1)$ y después de dar una vuelta hacia la derecha regresa al punto $(0, 0)$ desde la dirección $(1, -1)$; la otra inicia en la dirección $(-1, -1)$ y después de dar una vuelta hacia la izquierda regresa al punto $(0, 0)$ desde la dirección $(-1, 1)$. Estas dos trayectorias son *órbitas homoclínicas* del sistema.

7.7. Bifurcaciones

Si las ecuaciones de un sistema dinámico dependen de un parámetro, es lógico pensar que el comportamiento de dicho sistema dependa del valor de ese parámetro. Esto es cierto tanto para sistemas lineales como no lineales.

Sin embargo, las variaciones de comportamiento que puede tener un sistema lineal son menores en comparación con las que pueden suceder en sistemas no lineales. Si al variar un parámetro el comportamiento del sistema cambia *estructuralmente* (de forma muy notoria), se dice que el parámetro ha tomado un *valor de bifurcación*.

Ejemplo 7.7 Consideremos el sistema descrito por la ecuación

$$\dot{x} = (\alpha - x^2)x \tag{7.6}$$

Para valores negativos de α el sistema tendrá un único punto de equilibrio en $x = 0$, porque es la única condición en la que $\dot{x} = 0$. Sin embargo, si $\alpha \geq 0$ existirán tres puntos de equilibrio en $x_1 = 0, x_2 = +\sqrt{a}, x_3 = -\sqrt{a}$. Este cambio es muy importante, y por lo tanto decimos que en $\alpha = 0$ hay una *bifurcación* del sistema, o lo que es igual, que el valor de bifurcación para el parámetro α es 0.

7.8. Comportamientos caóticos

El comportamiento de un sistema dinámico, lineal o no lineal, depende de las condiciones iniciales. En los sistemas lineales esta dependencia es suave, es decir que si se escogen dos condiciones iniciales cercanas, el comportamiento del sistema será muy parecido.

Existen algunos sistemas no lineales en los que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales desencadenan comportamientos muy diferentes; tales sistemas se denominan *caóticos*.

Ejemplo 7.8 Consideremos el sistema discreto de primer orden descrito por la ecuación:

$$x(k+1) = f(x(k)) \qquad f(x) = \begin{cases} (2-x)/4 & x \in [0, 18/41) \\ 10x - 4 & x \in [18/41, 1/2) \\ 10x - 5 & x \in [1/2, 23/41) \\ (3-x)/4 & x \in [23/41, 1] \end{cases} \tag{7.7}$$

$f(x)$ se muestra en la figura 7.11. En la figura 7.12 se muestra el comportamiento del sistema para tres condiciones iniciales muy cercanas: $x_a(0) = 0.445 + 1E - 11$ (en negro), $x_b(0) = 0.445 + 3E - 11$ (en azul) y $x_c(0) = 0.445 + 5E - 11$ (en rojo). Nótese cómo a partir de $k = 35$ el comportamiento del sistema difiere notablemente aun cuando las tres condiciones iniciales se asemejan mucho. Este tipo de comportamiento es *caótico*.

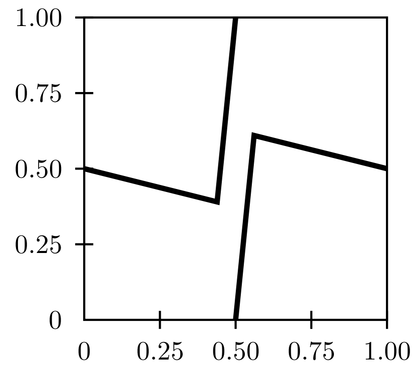


FIGURA 7.11: Función discreta que origina un sistema caótico

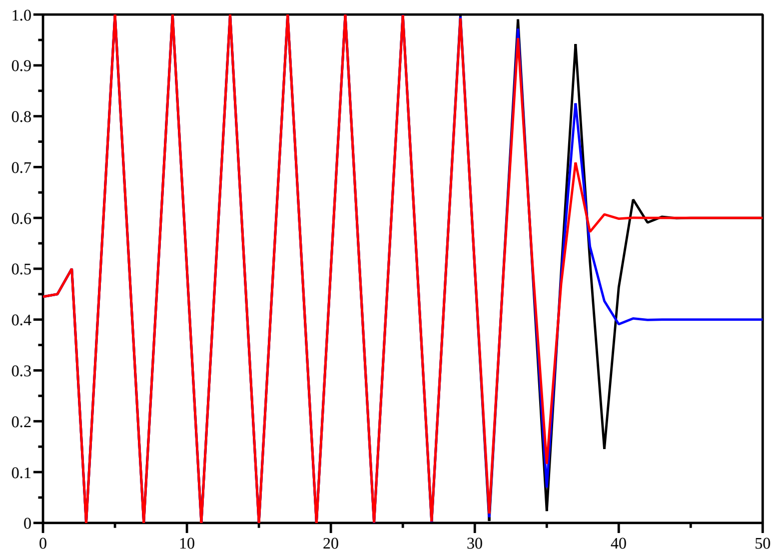
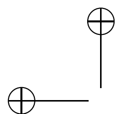
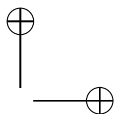
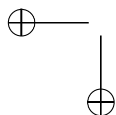
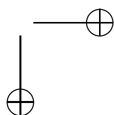


FIGURA 7.12: Respuesta de un sistema discreto caótico a tres entradas diferentes: $x_a = 0.445 + 1 \cdot 10^{-11}$ (negro), $x_b = 0.445 + 3 \cdot 10^{-11}$ (azul) y $x_c = 0.445 + 5 \cdot 10^{-11}$ (rojo)

Apéndice A

Demostraciones de las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$

A.1. Propiedades de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $F(s)$ $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ calculada como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{A.1}$$

Sean $f(t), f_1(t), f_2(t)$ tres funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente $F(s), F_1(s), F_2(s)$, y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:

A.1.1. Linealidad

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s) \tag{A.2}$$

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s) \tag{A.3}$$

Demostración A.1 La propiedad de linealidad de la trasnformada de Laplace se desprende de la propiedad de linealidad de la integración. Demostramos primero la propiedad de superposición (A.2).

La transformada de Laplace de $f_1(t) + f_2(t)$ es, según la definición (A.1):

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = \int_0^\infty [f_1(t) + f_2(t)]e^{-st}dt$$

Debido a que la integración es una operación lineal, podemos separar la integral de una suma en la suma de las integrales:

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$

Las dos integrales corresponden a las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, con lo que queda demostrada (A.2)

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = F_1(s) + F_2(s)$$

Para demostrar (A.3) también acudimos a la propiedad de linealidad de la integración. La transformada de Laplace de $af(t)$ es

$$\mathcal{L}\left\{af(t)\right\} = \int_0^\infty [af(t)]e^{-st}dt = a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = aF(s)$$

A.1.2. Diferenciación

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+) \tag{A.4}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0^+) \tag{A.5}$$

Demostración A.2 Para demostrar (A.4) calculamos la transformada de Laplace de la derivada $\frac{df}{dt}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \left[\frac{df}{dt}e^{-st}\right]dt$$

Esta integral puede resolverse por partes, haciendo $u = e^{-st}$ y $dv = \left[\frac{df}{dt}\right]dt$ y por lo tanto $du = -se^{-st}dt$ y $v = f(t)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t)e^{-st}\big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)dt$$

La integral es respecto a t, y por tanto s es constante y puede salir de la integral

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t)e^{-st}\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t(dt = f(t)e^{-st}\big|_0^\infty + sF(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(0^+)e^{-s0} + sF(s)$$

El valor del límite no está determinado, hasta tanto no se conozca $f(t)$. Sin embargo, para todas aquellas funciones que decrezcan, sean constantes, o que crezcan *más lentamente que* e^{st} el valor del límite será 0. Este tipo de funciones son las que empleamos en análisis de sistemas dinámicos, y en consecuencia podemos escribir:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = -f(0^+) + sF(s)$$

Esto concluye la demostración de (A.4).

Para demostrar (A.5), hacemos notar que para $n = 1$ se reduce a (A.4), y por tanto podemos emplear el método de inducción para la demostración: calculemos la transformada de $\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}$ empleando (A.4):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{d}\left[\frac{df^k}{dt^k}\right]\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{df^k}{dt^k}\right\} - \left.\frac{df^k}{dt^k}\right|_{t=0^+}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}\right\} = s\left[s^kF(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1}f^{(i)}(0^+)\right] - \left.\frac{df^k}{dt^k}\right|_{t=0} =$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}\right\} = \left[s^{(k+1)}F(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{(k+1)-i-1}f^{(i)}(0^+)\right] - f^{(k)}(0)$$

El término $f^k(0)$ puede escribirse como $s^{((k+1)-i-1)}f^{(k)}(0)$ cuando $i = k$, e incorporarlo en la sumatoria

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}\right\} = \left[s^{(k+1)}F(s) - \sum_{i=0}^{k} s^{(k+1)-i-1}f^{(i)}(0^+)\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(k+1)}f}{dt^{(k+1)}}\right\} = \left[s^{(k+1)}F(s) - \sum_{i=0}^{(k+1)-1} s^{(k+1)-i-1}f^{(i)}(0^+)\right]$$

Esta expresión corresponde a (A.5) para $(k+1)$ lo que completa la demostración por inducción.

A.1.3. Desplazamiento en la frecuencia

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a) \tag{A.6}$$

Demostración A.3 La transformada de Laplace de $e^{at}f(t)$ es

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

La integral corresponde a la definición de la transformada de Laplace (A.1), pero evaluada en $s - a$ en lugar de s, es decir:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

A.1.4. Multiplicación por t

$$\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds} \tag{A.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \tag{A.8}$$

Demostración A.4 Para demostrar (A.7) calculamos la derivada de $F(s)$ respecto a s

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right\}$$

La derivada se hace respecto a s y la integral respecto a t, por lo tanto la derivada puede incorporarse dentro de la integral

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left\{e^{-st} f(t)\right\} dt$$

Como la derivada es respecto a s, t y $f(t)$ son constantes:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty [tf(t)]e^{-st}dt$$

La integral corresponde a la transformada de Laplace de $tf(t)$, lo que completa la demostración de (A.7).

Para demostrar (A.8) resaltamos que cuando $n = 1$ se convierte en (A.7), y por tanto podemos emplear el método de inducción. Al evaluar (A.8) en $n = k$ se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\} = (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}$$

La derivada $k+1$ de $F(s)$ respecto a s es

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{d^k f}{ds^k}\right\}$$

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(-1)^k}\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\}\right\}$$

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{1}{(-1)^k}\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k f(t)\right] dt\right\}$$

Como la integral es respecto a t y la derivada respecto a s se tiene:

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{1}{(-1)^k}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[e^{-st} t^k f(t)\right] dt$$

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{1}{(-1)^k}\int_0^\infty t^k f(t)\frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right] dt$$

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \frac{1}{(-1)^{(k+1)}}\int_0^\infty t^{(k+1)}f(t)e^{-st}dt$$

La integral corresponde a la transformada de Laplace de $t^{(k+1)}f(t)$, es decir:

$$\frac{d^{(k+1)}F(s)}{ds^{(k+1)}} = \mathcal{L}\left\{t^{(k+1)}f(t)\right\}$$

Esta expresión resulta ser igual a (A.8) evaluada en $n = k+1$ con lo que se completa la demostración.

A.1.5. Teorema del valor inicial

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{A.9}$$

Demostración A.5 Para demostrar (A.9) consideremos primero la propiedad de diferenciación (A.4) y calculemos el límite cuando $s \to \infty$ a cada lado de la igualdad:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right]$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right]$$

Cuando $s \to \infty$ la integral se hace cero, y por lo tanto tenemos

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0^+)\right]$$

Dado que $f(0^+)$ es independiente de s, y además $f(0^+) = lim_{t\to 0^+}f(t)$ se tiene

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

A.1.6. Teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{A.10}$$

Demostración A.6 Para demostrar (A.10) consideremos primero la propiedad de diferenciación (A.4) y calculemos el límite cuando $s \to 0$ a cada lado de la igualdad:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

$$\lim_{s\to 0}\left[\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}\right]=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^+)\right]$$

$$\lim_{s\to 0}\left[\int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt\right]=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^+)\right]$$

Cuando $s\to 0$ la integral se simplifica

$$\left[\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}dt\right]=\lim_{t\to\infty}f(t)-f(0^+)=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^+)\right]$$

Con lo que resulta

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

A.1.7. Convolución

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\} & = & F_1(s)F_2(s)\\ f_1(t)*f_2(t) & = & \int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\end{array}\tag{A.11}$$

Demostración A.7 Para demostrar (A.11) calculemos la transformada de Laplace de la convolución entre $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\}=$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty\int_0^\infty f_1(t-\tau)e^{-st}f_2(\tau)d\tau dt$$

Podemos intercambiar el orden de integración y reagrupar:

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty\int_0^\infty f_1(t-\tau)e^{-st}f_2(\tau)dtd\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty f_2(\tau)\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau$$

Ahora efectuamos un cambio de variable $\xi=t-\tau$ de tal manera que $d\xi=dt$ y $t=\xi+\tau$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty f_2(\tau)\left[\int_{-\tau}^\infty f_1(\xi)e^{-s(\xi+\tau)}d\xi\right]d\tau$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_{-\tau}^\infty f_1(\xi)e^{-s\xi}d\xi\right]d\tau$$

Como ξ es independiente de τ podemos sacar la integral

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = \left[\int_{-\tau}^{\infty} f_1(\xi)e^{-s\xi}d\xi\right]\left[\int_{0}^{\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]$$

Además, consideramos que $f_1(t)$ vale cero para valores negativos de t, y por tanto podemos modificar los límites de la integral, completando así la demostración

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = \left[\int_{0}^{\infty} f_1(\xi)e^{-s\xi}d\xi\right]\left[\int_{0}^{\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

A.1.8. Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}\left\{f(t-T)\right\} = e^{-sT}F(s) \tag{A.12}$$

Demostración A.8 La transformada de Laplace de $f(t-T)$ es

$$\mathcal{L}\left\{f(t-T)\right\} = \int_{0}^{\infty} f(t-T)e^{-st}dt$$

Efectuando el cambio de variable $\tau = t - T$ de tal manera que $dt = d\tau$ y $t = \tau + T$ se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t-T)\right\} = \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}e^{-sT}d\tau$$

Como la integral es respecto a τ y T es constante, puede sacarse de la integral el término e^{-sT}

$$\mathcal{L}\left\{f(t-T)\right\} = e^{-sT}\int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Si asumimos que $f(t)$ vale cero para todo valor negativo de t, entonces los límites de la integral pueden modificarse así:

$$\mathcal{L}\left\{f(\tau)\right\} = e^{-sT}\int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

La integral corresponde a la transformada de Laplace de f, en dónde la variable en la que se calcula se ha denominado ahora τ en lugar de t, es decir:

$$\mathcal{L}\left\{f(\tau)\right\} = e^{-sT}F(s)$$

A.2. Propiedades de la transformada $\mathcal{Z}$

La transformada $\mathcal{Z}$ de una función $f(k)$ $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es una función $F(z)$ $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ calculada como

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k) \tag{A.13}$$

Sean $f(k), f_1(k), f_2(k)$ tres funciones cuyas transformadas $\mathcal{Z}$ son, respectivamente $F(z), F_1(z), F_2(z)$ y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:

A.2.1. Linealidad

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) + f_2(k)\} = F_1(z) + F_2(z) \tag{A.14}$$

$$\mathcal{Z}\{af(k)\} = aF(z) \tag{A.15}$$

Demostración A.9 La propiedad de Linealidad de la transformada $\mathcal{Z}$ se desprende de la propiedad de Linealidad de la sumatoria. Demostramos primero la propiedad de superposición (A.14).

La transformada $\mathcal{Z}$ $f_1(k) + f_2(k)$ es, según la definición (A.13):

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) + f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}[f_1(k) + f_2(k)]$$

Debido a que la sumatoria es una operación lineal, podemos separarla en la suma de dos sumatorias:

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) + f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f_1(k) + \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f_2(k)$$

Las dos integrales corresponden a las transformadas $\mathcal{Z}$ de $f_1(k)$ y $f_2(k)$, respectivamente, con lo que queda demostrada (A.14)

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) + f_2(k)\} = F_1(z) + F_2(z)$$

Para demostrar A.15 también acudimos a la propiedad de linealidad de la sumatoria. La transformada $\mathcal{Z}$ de $af(k)$ es

$$\mathcal{Z}\{af(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}[af(k)] = a\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}[f(k)] = aF(z)$$

A.2.2. Diferencia positiva

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0) \tag{A.16}$$

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i} f(i) \tag{A.17}$$

Demostración A.10 Para demostrar A.16 calculamos la transformada $\mathcal{Z}$ de la diferencia $f(k+1)$

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k+1) = z^{-0} f(1) + z^{-1} f(2) + z^{-2} f(3) + \cdots$$

Si dividimos a cada lado de la ecuación por z tenemos

$$z^{-1}\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = z^{-1} f(1) + z^{-2} f(2) + z^{-3} f(3) + \cdots$$

Si sumamos a cada lado de la ecuación $z^-0 f(0) = f(0)$

$$z^{-1}\mathcal{Z}\{f(k+1)\} + f(0) = z^{-0} f(0) + z^{-1} f(1) + z^{-2} f(2) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k)$$

La sumatoria resulta ser la transformada $\mathcal{Z}$ de $f(k)$, es decir

$$z^{-1}\mathcal{Z}\{f(k+1)\} + f(0) = F(z)$$

De donde se deduce que

$$z^{-1}\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = F(z) - f(0)$$
$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$$

Esto concluye la demostración de (A.16).

Para demostrar (A.17) calculamos la transformada $\mathcal{Z}$ de $f(k+n)$

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k+n) = z^{-0} f(n) + z^{-1} f(n+1) + z^{-2} f(n+2) + \cdots$$

Si dividimos a cada lado de la ecuación por z^n tenemos

$$z^{-n}\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^{-n} f(n) + z^{-n-1} f(n+1) + z^{-n-2} f(n+2) + \cdots$$

Si sumamos a cada lado de la ecuación $z^{-0} f(0) + z^{-1} f(1) + \cdots + z^{-n+1} f(n-1)$

$$\begin{aligned} z^{-n}\mathcal{Z}\{f(k+n)\} + z^{-0} f(0) + z^{-1} f(1) + \cdots + z^{-n-1} f(n+1) = \\ z^{-0} f(0) + z^{-1} f(1) + \cdots + z^{-n+1} f(n-1) + \\ z^{-n} f(n) + z^{-n-1} f(n+1) + z^{-n-2} f(n+2) + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k) \end{aligned}$$

La sumatoria resulta ser la transformada $\mathcal{Z}$ de $f(k)$, es decir

$$z^{-n}\mathcal{Z}\{f(k+n)\} + f(0) + z^{-1}f(1) + \cdots + z^{-n+1}f(n-1) = F(z)$$

De donde se deduce que

$$z^{-n}\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = F(z) - f(0) - z^{-1}f(1) - \cdots - z^{-n+1}f(n-1)$$

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^nF(z) - z^nf(0) - z^{n-1}f(1) - \cdots - z^1f(n-1)$$

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^nF(z) - \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i}f(i)$$

Esto concluye la demostración de (A.17).

A.2.3. Escalamiento en la frecuencia

$$\mathcal{Z}\left\{a^kf(t)\right\} = F(z/a) \tag{A.18}$$

Demostración A.11 La transformada $\mathcal{Z}$ de $a^kf(k)$ es

$$\mathcal{Z}\left\{a^kf(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}[a^kf(k)]dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{-k}f(k)$$

La integral corresponde a la definición de la transformada $\mathcal{Z}$ (A.13), pero evaluada en z/a en lugar de z, es decir

$$\mathcal{Z}\left\{a^kf(t)\right\} = F(z/a)$$

A.2.4. Multiplicación por k

$$\mathcal{Z}\{kf(k)\} = -z\frac{d}{dz}\{F(z)\} \tag{A.19}$$

$$\mathcal{Z}\{k^nf(k)\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left\{k^{(n-1)}f(k)\right\} \tag{A.20}$$

Demostración A.12 Para demostrar (A.19) calculamos la derivada de $F(z)$ respecto a z

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}f(k)\right\}$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty}(-k)z^{-k-1}f(k)$$

Multiplicando por z a cada lado de la ecuación se tiene

$$z\frac{dF(z)}{dz} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} k f(k)$$

La sumatoria corresponde a la transformada $\mathcal{Z}$ de $kf(k)$, lo que completa la demostración de (A.19)

Para demostrar (A.20) definamos una función $g(k) = k^{(n-1)} f(k)$ y apliquemos (A.19)

$$\mathcal{Z}\{kg(k)\} = -z\frac{d}{dz}\{G(z)\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k[k^{(n-1)}f(k)]\right\} = -z\frac{d}{dz}\{\mathcal{Z}\{g(k)\}\}$$

$$\mathcal{Z}\{k^n f(k)]\} = -z\frac{d}{dz}\left\{\mathcal{Z}\left\{k^{(n-1)}f(k)\right\}\right\}$$

Lo que completa la demostración de (A.20)

A.2.5. Teorema del valor inicial

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) \tag{A.21}$$

Demostración A.13 La demostración de (A.21) se desprende de la definición de transformada $\mathcal{Z}$ (A.13)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f(k)$$

$$F(z) = z^{-0}f(0) + z^{-1}f(1) + z^{-2}f(2) + \cdots$$

$$F(z) = f(0) + z^{-1}f(1) + z^{-2}f(2) + \cdots$$

Cuando $z \to \infty$ cada uno de los términos de la derecha se hace cero, salvo $f(0)$ lo que completa la demostración

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0)$$

A.2.6. Teorema del valor final

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \tag{A.22}$$

Demostración A.14 Para demostrar (A.22) calculemos la transformada $\mathcal{Z}$ de la expresión $f(k+1) - f(k)$ y apliquemos la propiedad de diferencia positiva (A.16)

$$\mathcal{Z}\{f(k+1) - f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty}[f(k+1) - f(k)]\, z^{-k}$$

$$zF(z) - zf(0) - F(z) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \left[f(k+1) - f(k)\right] z^{-k}$$

$$(z-1)F(z) - zf(0) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \left[f(k+1) - f(k)\right] z^{-k}$$

Al tomar el límite cuando $z \to 1$ se obtiene

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f(0) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \left[f(k+1) - f(k)\right]$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f(0) =$$
$$\lim_{j\to\infty} \left[f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \cdots + f(j) - f(j-1) + f(j+1) - f(j)\right]$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f(0) = \lim_{j\to\infty} \left[-f(0) + f(j+1)\right]$$

Como $f(0)$ es independiente de j puede salir del límite, con lo que se completa la demostración

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f(0) = -f(0) + \lim_{j\to\infty} f(j+1)$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{j\to\infty} f(j+1) = \lim_{j\to\infty} f(j)$$

A.2.7. Convolución

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = F_1(z)F_2(z) \\ f_1(k) * f_2(k) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) f_2(h-k) \end{aligned} \tag{A.23}$$

Demostración A.15 Para demostrar (A.23) calculemos la transformada $\mathcal{Z}$ de la convolución entre $f_1(k)$ y $f_2(k)$:

$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) f_2(h-k)\right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) f_2(h-k)\right] z^{-h}$$

Podemos intercambiar el orden de las sumatorias y reagrupar los términos:

$$\mathcal{Z}\left\{f_1(k) * f_2(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \sum_{h=0}^{\infty} f_2(h-k) z^{-h}$$

Efectuamos el cambio de variable $r = h - k$ que implica $h = r + k$

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \sum_{r=-k}^{\infty} f_2(r) z^{-r} z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} \sum_{r=-k}^{\infty} f_2(r) z^{-r}$$

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k}\right] \left[\sum_{r=-k}^{\infty} f_2(r) z^{-r}\right]$$

Si consideramos sólo funciones $f(k)$ que valgan cero para valores negativos de k podemos cambiar los límites de la sumatoria, con lo que se completa la demostración

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k}\right] \left[\sum_{r=0}^{\infty} f_2(r) z^{-r}\right]$$

$$\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = F_1(z) F_2(z)$$

A.3. Parejas de transformadas de Laplace

A.3.1. Escalón unitario

Sea

$$f_1(t) = \mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de $f_1(t)$ será

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\mu(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s}$$

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = 0 - (\frac{1}{-s}) = \frac{1}{s} \qquad \text{(A.24)}$$

A.3.2. Exponenciales

Sea $f_2(t) = e^{at}\mu(t)$. Para obtener la transformada de Laplace de $f_2(t)$ aplicamos la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (A.6) a la transformada del escalón (A.24)

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\mu(t)\right\} = \mathcal{L}\{\mu(t)\}_{s-a} = \left.\frac{1}{s}\right|_{s-a} = \frac{1}{s-a} \qquad \text{(A.25)}$$

A.3.3. Sinusoides

Seno

Sea $f_3(t) = \sin(\omega t)\mu(t)$. Para obtener la transformada de Laplace de $f_3(t)$ empleamos la Fórmula de Euler para reescribir la función:

$$f_3(t) = \sin(\omega t)\mu(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\mu(t)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a cada lado de la igualdad resulta

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mu(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\mu(t)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\mu(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\mu(t)\right\}\right]$$

Cada una de las dos transformadas de Laplace puede obtenerse empleando A.25:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mu(t)\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right]$$

Al efectuar la suma se obtiene

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mu(t)\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mu(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{A.26}$$

Coseno

Sea $f_4(t) = \cos\omega t$. Para obtener la transformada de Laplace de $f_4(t)$ podríamos emplear la fórmula de Euler; sin embargo, optamos por otra posibilidad: empleamos la propiedad de diferenciación (A.4) y la aplicamos a la transformada de $\sin\omega t$, (A.26):

$$f_4(t) = \cos\omega t = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sin\omega t$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\mu(t)\} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\mu(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\mu(t)\} = \frac{1}{\omega}\left[s\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\mu(t)\} - \sin\omega t|_{t=0}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\mu(t)\} = \frac{1}{\omega}\left[s\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin\omega 0\right]$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\mu(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{A.27}$$

A.3.4. Sinusoides amortiguadas

Sean $f_5(t) = e^{at}\sin(\omega t)\mu(t)$ y $f_6(t) = e^{at}\cos(\omega t)\mu(t)$. Para obtener la transformada de Laplace de $f_5(t)$ y $f_6(t)$ aplicamos la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (A.6) a las transformadas de seno y coseno (A.26) y (A.27):

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin(\omega t)\mu(t)\right\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \tag{A.28}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos(\omega t)\mu(t)\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \tag{A.29}$$

A.3.5. Rampas, parábolas y monomios de t

Sea $f_7(t) = t^n\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_7(t)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.8) a la transformada del escalón unitario (A.24).

$$\mathcal{L}\left\{f_7(t) = t^n\mu(t)\right\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{A.30}$$

Para los casos particulares en que $n = 1$ y $n = 2$, la función $t^n\mu(t)$ se convierte en las funciones rampa y parábola unitarias, respectivamente:

$$\mathcal{L}\left\{f_8(t) = t\mu(t)\right\} = \frac{1}{s^2} \tag{A.31}$$

$$\mathcal{L}\left\{f_9(t) = t^2\mu(t)\right\} = \frac{2}{s^3} \tag{A.32}$$

A.3.6. Exponenciales por t^n

Sea $f_{10}(t) = t^n e^{at}\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_{10}(t)$ aplicamos la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (A.6) a la transformada del $t^n\mu(t)$ (A.30)

$$\mathcal{L}\left\{f_{10}(t) = t^n e^{at}\mu(t)\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \tag{A.33}$$

A.3.7. Sinusoides por t

Sea $f_{11}(t) = t\sin(\omega t)\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_{11}(t)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.7) a la transformada de $\sin(\omega t)\mu(t)$ (A.26)

$$\mathcal{L}\left\{t\sin(\omega t)\mu(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{A.34}$$

Sea $f_{12}(t) = t\cos(\omega t)\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_{12}(t)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.7) a la transformada de $\cos(\omega t)\mu(t)$ (A.27)

$$\mathcal{L}\left\{t\cos(\omega t)\mu(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{A.35}$$

A.3.8. Sinusoides amortiguadas multiplicadas por t

Sea $f_{13}(t) = te^{at}\sin(\omega t)\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_{13}(t)$ aplicamos la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (A.6) a la transformada de $t\sin(\omega t)\mu(t)$ (A.34)

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\sin(\omega t)\mu(t)\right\} = \frac{\omega(s-a)}{((s-a)^2+\omega^2)^2} \tag{A.36}$$

Sea $f_{14}(t) = te^{at}\cos(\omega t)\mu(t)$. Para calcular la transformada de Laplace de $f_{14}(t)$ aplicamos la propiedad de desplazamiento en la frecuencia (A.6) a la transformada de $t\cos(\omega t)\mu(t)$ (A.35)

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\cos(\omega t)\mu(t)\right\} = \frac{(s-a)^2-\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2} \tag{A.37}$$

A.4. Parejas de transformadas $\mathcal{Z}$

A.4.1. Escalón unitario

Sea

$$f_1(k) = \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

La transformada $\mathcal{Z}$ de $f_1(k)$ será

$$\mathcal{Z}\left\{\mu(k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k$$

La sumatoria puede calcularse recordando que $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ (siempre y cuando la serie converja, es decir, con $|a| < 1$)

$$\mathcal{Z}\left\{\mu(k)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{A.38}$$

A.4.2. Series geométricas

Sea $f_2(k) = a^k\mu(k)$. Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_2(k)$ aplicamos la propiedad de escalamiento en la frecuencia (A.18) a la transformada del escalón (A.38)

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\mu(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mu(k)\right\}_{z/a} = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z/a} = \frac{z/a}{z/a-1} = \frac{z}{z-a} \qquad \text{(A.39)}$$

A.4.3. Sinusoides

Seno

Sea $f_3(k) = \sin(ak)\mu(k)$. Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_3(k)$ empleamos la Fórmula de Euler para reescribir la función:

$$f_3(k) = \sin(ak)\mu(k) = \frac{e^{jak} - e^{-jak}}{2j}\mu(k) = \frac{(e^{ja})^k - (e^{-ja})^k}{2j}\mu(k)$$

Al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la igualdad resulta

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{(e^{ja})^k - (e^{-ja})^k}{2j}\mu(k)\right\} =$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(k)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{Z}\left\{(e^{ja})^k\mu(k)\right\} - \mathcal{Z}\left\{(e^{-ja})^k\mu(k)\right\}\right]$$

Cada una de las dos transformadas $\mathcal{Z}$ puede obtenerse empleando A.39:

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(a)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{ja}} - \frac{z}{z-e^{-ja}}\right]$$

Al efectuar la suma se obtiene

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(a)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{z^2 - ze^{-ja} - z^2 + ze^{ja}}{z^2 - ze^{-ja} - ze^{ja} + e^{ja}e^{-ja}}\right] =$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(a)\right\} = \left[\frac{z\frac{e^{ja}-e^{-ja}}{2j}}{z^2 - 2z\frac{e^{ja}+e^{-ja}}{2} + 1}\right]$$

Las fracciones que contienen exponenciales complejas pueden reescribirse empleando la fórmula de Euler:

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(ak)\mu(a)\right\} = \frac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \qquad \text{(A.40)}$$

Coseno

Sea $f_4(k) = \cos(ak)\mu(k)$. Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_4(k)$ empleamos la Fórmula de Euler para reescribir la función:

$$f_4(k) = \cos(ak)\mu(k) = \frac{e^{jak} + e^{-jak}}{2}\mu(k) = \frac{(e^{ja})^k + (e^{-ja})^k}{2}\mu(k)$$

Al aplicar la transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de la igualdad resulta

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(k)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{(e^{ja})^k + (e^{-ja})^k}{2}\mu(k)\right\} =$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(k)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{(e^{ja})^k\mu(k)\right\} + \mathcal{Z}\left\{(e^{-ja})^k\mu(k)\right\}\right]$$

Cada una de las dos transformadas $\mathcal{Z}$ puede obtenerse empleando A.39:

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(a)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{ja}} + \frac{z}{z - e^{-ja}}\right]$$

Al efectuar la suma se obtiene

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(a)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z^s - ze^{-ja} + z^2 - ze^{ja}}{z^2 - ze^{-ja} - ze^{ja} + e^{ja}e^{-ja}}\right] =$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(a)\} = \left[\frac{z^2 - z\frac{e^{ja}+e^{-ja}}{2}}{z^2 - 2z\frac{e^{ja}+e^{-ja}}{2} + 1}\right]$$

Las fracciones que contienen exponenciales complejas pueden reescribirse empleando la fórmula de Euler:

$$\mathcal{Z}\{\cos(ak)\mu(a)\} = \frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1} \qquad \text{(A.41)}$$

A.4.4. Sinusoides amortiguadas

Sean $f_5(k) = b^k \sin(ak)\mu(k)$ y $f_6(k) = b^k \cos(ak)\mu(k)$. Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_5(k)$ y $f_6(k)$ aplicamos la propiedad de escalamiento en la frecuencia (A.18) a las transformadas de seno y coseno (A.40) y (A.41):

$$\mathcal{Z}\left\{b^k \sin(ak)\mu(k)\right\} = \frac{\frac{z}{b}\sin a}{(\frac{z}{b})^2 - 2\frac{z}{b}\cos a + 1} = \frac{zb\sin a}{z^2 - 2b\cos a + b^2} \qquad \text{(A.42)}$$

$$\mathcal{Z}\left\{b^k \cos(ak)\mu(k)\right\} = \frac{\left(\frac{z}{b}\right)^2 - \frac{z}{b}\cos a}{(\frac{z}{b})^2 - 2\frac{z}{b}\cos a + 1} = \frac{z^2 - zb\cos a}{z^2 - 2b\cos a + b^2} \qquad \text{(A.43)}$$

A.4.5. Rampas y monomios de k

Sea $f_7(k) = k\mu(k)$. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_7(k)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19) a la transformada del escalón unitario (A.38).

$$\mathcal{Z}\{k\mu(k)\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\{k\mu(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2} \tag{A.44}$$

Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $k^n\mu(k)$ es necesario aplicar en forma iterativa la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19).

A.4.6. Series geométricas por k^n

Sea $f_8(k) = ka^k\mu(k)$. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_8(k)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19) a la transformada de las series geométricas (A.39).

$$\mathcal{Z}\left\{ka^k\mu(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right] = -z\frac{(z-a)-z}{(z-a)^2}$$

$$\mathcal{Z}\{k\mu(t)\} = \frac{az}{(z-a)^2} \tag{A.45}$$

Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $k^n a^k\mu(k)$ es necesario aplicar en forma iterativa la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19)

A.4.7. Sinusoides por k

Seno

Sea $f_9(k) = k\sin(ak)\mu(k)$. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_9(k)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19) a la transformada de seno (A.40).

$$\mathcal{Z}\{k\sin(ak)\mu(k)\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{\sin a}{z^2-2z\cos a+1}\right] =$$

$$\mathcal{Z}\{k\sin(ak)\mu(k)\} = \\ -z\frac{(z^2-2z\cos a+1)\sin a - z\sin a(2z-2\cos a)}{(z^2-2z\cos a+1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\{k\sin(ak)\mu(k)\} = \\ -z\frac{z^2\sin a - 2z\cos a\sin a + \sin a - 2z^2\sin a + 2z\sin a\cos a}{(z^2-2z\cos a+1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\sin(ak)\mu(k)\right\} = \frac{z^3\sin a + z\sin a}{(z^2 - 2z\cos a + 1)^2} \tag{A.46}$$

Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $k^n\sin(ak)\mu(k)$ es necesario aplicar en forma iterativa la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19).

Coseno

Sea $f_{10}(k) = k\sin(ak)\mu(k)$. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_{10}(k)$ aplicamos la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19) a la transformada de coseno (A.41).

$$\mathcal{Z}\left\{k\cos(ak)\mu(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1}\right] =$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\cos(ak)\mu(k)\right\} = \\ -z\frac{(z^2 - 2z\cos a + 1)(2z - \cos)a - (z^2 - z\cos a)(2z - 2\cos a)}{(z^2 - 2z\cos a + 1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\cos(ak)\mu(k)\right\} = \\ -z\frac{\begin{bmatrix}2z^3 - z^2\cos a - 4z^2\cos a + 2z\cos^2 a + 2z - \cos a\\ -2z^3 + 2z^2\cos a + 2z^2\cos a - 2z\cos^2 a\end{bmatrix}}{(z^2 - 2z\cos a + 1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\cos(ak)\mu(k)\right\} = -z\frac{(-z^2 - 1)\cos a + 2z}{(z^2 - 2z\cos a + 1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{k\cos(ak)\mu(k)\right\} = \frac{(z^3 + z)\cos a - 2z^2}{(z^2 - 2z\cos a + 1)^2} \tag{A.47}$$

Para obtener la transformada $\mathcal{Z}$ de $k^n\cos(ak)\mu(k)$ es necesario aplicar en forma iterativa la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19).

A.4.8. Sinusoides amortiguadas por k

Sean $f_{11}(k) = kb^k\sin(ak)\mu(k)$ y $f_{12}(k) = kb^k\cos(ak)\mu(k)$. Para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de $f_{11}(k)$ y $f_{12}(k)$ aplicamos la propiedad de escalamiento en la frecuencia (A.18) a las transformadas de $k\sin(ak)\mu(k)$, (A.46) y $k\cos(ak)\mu(k)$, (A.47)

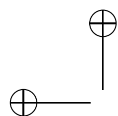
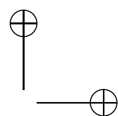
$$\mathcal{Z}\left\{kb^k\sin(ak)\mu(k)\right\} = \frac{(z/b)^3\sin a + (z/b)\sin a}{((z/b)^2 - 2(z/b)\cos a + 1)^2}$$

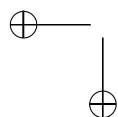
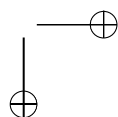
$$\mathcal{Z}\left\{kb^k\sin(ak)\mu(k)\right\} = \frac{bz^3\sin a + b^3z\sin a}{(z^2 - 2bz\cos a + b^2)^2} \tag{A.48}$$

$$\mathcal{Z}\left\{kb^k\cos(ak)\mu(k)\right\} = \frac{((z/b)^3+(z/b))\cos a - 2(z/b)^2}{((z/b)^2-2(z/b)\cos a+1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left\{kb^k\cos(ak)\mu(k)\right\} = \frac{(bz^3+b^3z)\cos a - 2b^2z^2}{(z^2-2bz\cos a+b^2)^2} \qquad \text{(A.49)}$$

Para obtener las transformadas $\mathcal{Z}$ de $k^nb^k\sin(ak)\mu(k)$ y $k^nb^k\cos(ak)\mu(k)$ es necesario aplicar en forma iterativa la propiedad de multiplicación por el tiempo (A.19).

Apéndice B

Diagramas de Bode para sistemas continuos

B.1. Definición

El valor de una función de transferencia $F(s)$, para un s específico, es un número complejo cuya amplitud es $|F(s)|$ y cuyo ángulo es $\arg\{F(s)\}$. Los diagramas de Bode para sistemas continuos muestran cómo varía la amplitud y el ángulo de ese número complejo, cuando s toma todos los posibles valores del eje imaginario positivo ($s = j\omega; \quad w \in (0, \infty)$). Específicamente se definen los siguientes diagramas:

Diagrama de magnitud

- La abscisa (eje horizontal) muestra el valor de ω en escala logarítmica.
- La ordenada (eje vertical) muestra la magnitud de $F(j\omega)$ medida en *decibeles*:

$$|F(j\omega)|_{\text{en db}} = 20 \log_{10} |F(j\omega)|$$

Diagrama de fase

- La abscisa (eje horizontal) muestra el valor de ω en escala logarítmica.
- La ordenada (eje vertical) muestra el ángulo de $F(j\omega)$ medida en grados o radianes.

B.2. Construcción de los diagramas de Bode

Debido a las escalas empleadas en los diagramas de Bode, éstos pueden ser construidos en forma aproximada mediante trazos rectos. La figura B.1 muestra los diagramas de Bode aproximados para funciones sencillas de orden 1.

La figura B.2 muestra los diagramas de Bode para funciones de orden 2; en estos casos, las aproximaciones pueden ser bastante lejanas de los diagramas exactos, dependiendo del factor de amortiguamiento ξ. Por esta razón se han trazado los diagramas exactos para una función de segundo orden (para el primer caso de la figura B.2), en las figuras B.3 y B.4

Para funciones de transferencia más sofisticadas que las de las figuras B.1 y B.2 el procedimiento consiste em:

1. Descomponer la función de transferencia como productos de términos más sencillos.

2. Trazar los diagramas de Bode estas funciones.

3. Sumar punto a punto los diagramas obtenidos en el paso anterior para obtener los de la función original.

Ejemplo B.1 Considérese la función de transferencia

$$F(s) = \frac{(s+10)}{(s+1)(s+100)}$$

Esta función puede descomponerse como el producto de cuatro funciones de transferencia más sencillas:

$$F(s) = \underbrace{\frac{s+10}{10}}_{F_A(s)} \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{F_B(s)} \underbrace{\frac{100}{s+100}}_{F_C(s)} \underbrace{\frac{1}{10}}_{F_D(s)}$$

Cada una de las funciones $F_A(s)$, $F_B(s)$, $F_C(s)$ y $F_D(s)$ son de la forma que se muestra en las figuras B.1 y B.2. Pueden trazarse los diagramas de Bode aproximados de estas funciones, y luego sumarlos punto a punto para obtener los diagramas de $F(s)$

$F(s)$	$\|F(jw)\|$	$\arg F(jw)$
$K > 0$		$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
$K < 0$		π, $-\pi$
s	$20db/dc$, 1	$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{s}$	1, $-20db/dc$	$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
$\frac{s+a}{a}$ $a > 0$	$20db/dc$, a	$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{10}$, a, $10a$
$\frac{a}{s+a}$ $a > 0$	a, $-20db/dc$	$\frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{10}$, a, $10a$, $-\frac{\pi}{2}$
$\frac{s-a}{-a}$ $a > 0$	$20db/dc$, a	$\frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{10}$, a, $10a$, $-\frac{\pi}{2}$
$\frac{-a}{s-a}$ $a > 0$	a, $-20db/dc$	$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{10}$, a, $10a$

FIGURA B.1: Resumen de los diagramas de Bode aproximados para sistemas continuos de primer orden (los cuatro primeros casos son exactos)

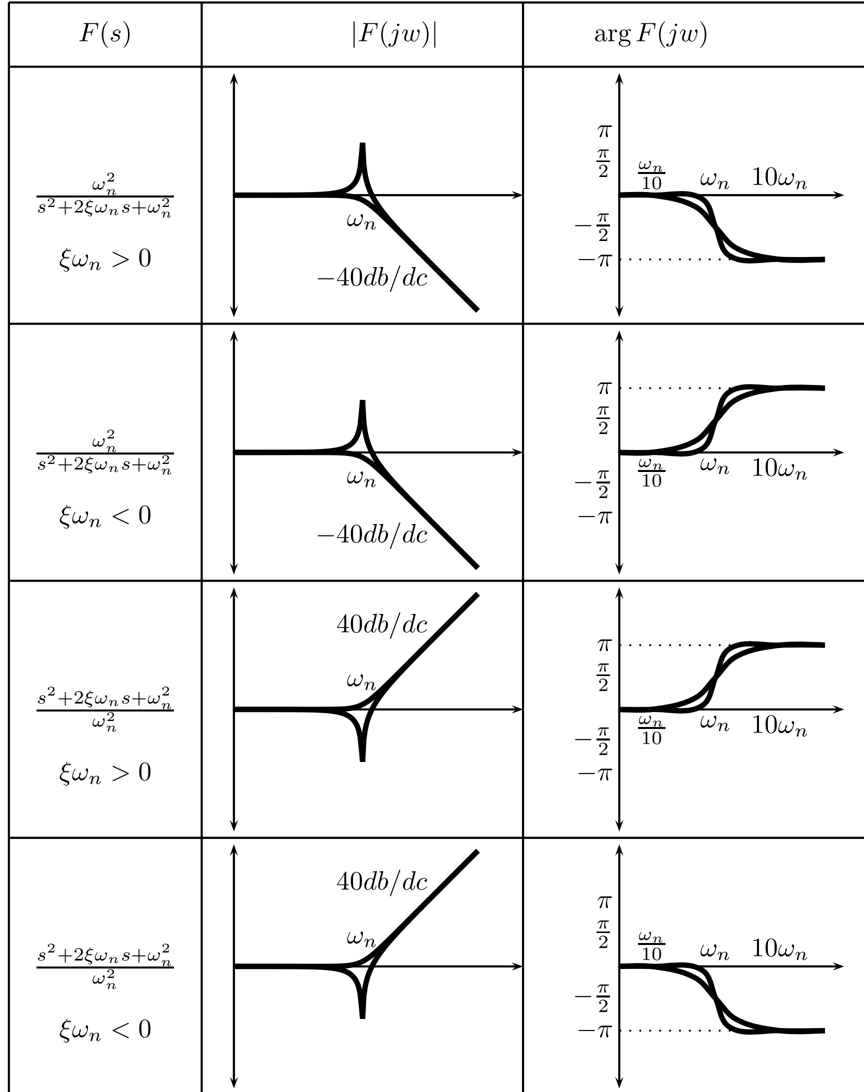


FIGURA B.2: Resumen de los diagramas de Bode aproximados para sistemas continuos de segundo orden

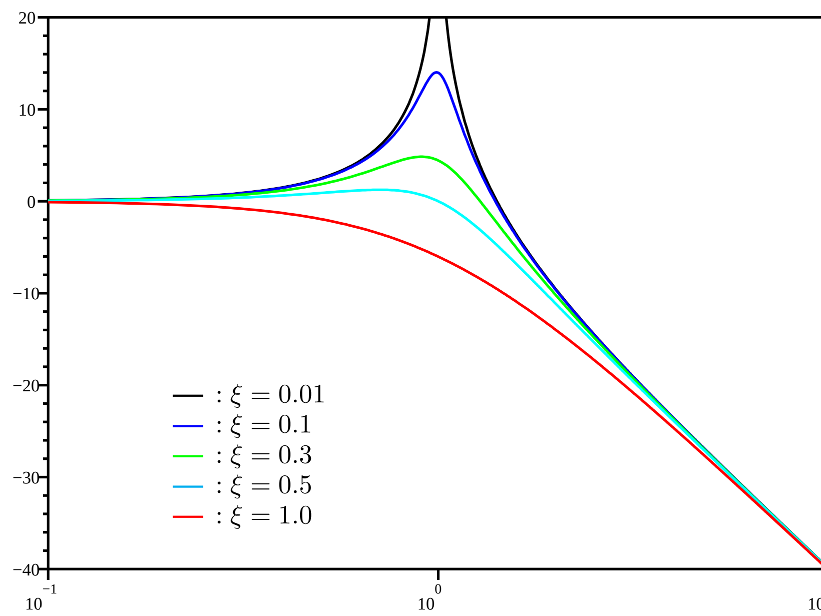


FIGURA B.3: Diagrama de Bode de magnitud para un sistema continuo de segundo orden con distintos factores de amortiguamiento

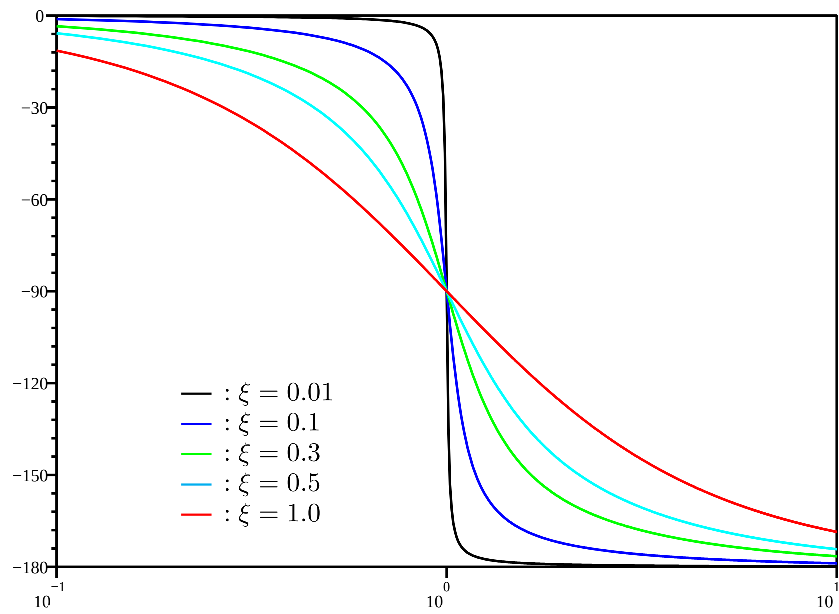


Figura B.4: Diagrama de Bode de fase para un sistema continuo de segundo orden con distintos factores de amortiguamiento

Apéndice C

Carta de Nichols

Supóngase la función de transferencia (C.1), que corresponde a un sistema realimentado simple con realimentación unitaria,

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{C.1}$$

Al evaluar $F(s)$ en $s = j\omega$ la ecuación (C.1) se convierte en

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \tag{C.2}$$

Podemos calcular la magnitud y el ángulo de $F(j\omega)$, a partir de la parte real y la parte imaginaria de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = X + jY \tag{C.3}$$

Al reemplazar (C.3) en (C.2) se obtiene

$$F(j\omega) = \frac{X + jY}{1 + X + jY} \tag{C.4}$$

La magnitud de $F(j\omega)$ será

$$M = |F(j\omega)| = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}} \tag{C.5}$$

El ángulo de $F(j\omega)$ será

$$\alpha = \arg F(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{(1 + X)}\right) \tag{C.6}$$

La tangente del ángulo de $F(j\omega)$ será

$$N = \tan(\alpha) = \tan\left(\arg F(j\omega)\right) \tag{C.7}$$

En las secciones C.1 y C.2 se muestra cómo (C.5) y (C.7) corresponden a las ecuaciones de unas circunferencias, para M y N constantes.

C.1. M-circunferencias

Al elevar al cuadrado la ecuación (C.5) se tiene

$$M^2 = \frac{X^2+Y^2}{(1+X)^2+Y^2} = \frac{X^2+Y^2}{1+2X+X^2+Y^2} \tag{C.8}$$

Que puede reescribirse como

$$\begin{gathered} M^2+2XM^2+X^2M^2+Y^2M^2 = X^2+Y^2 \\ X^2(1-M^2)-2M^2X-M^2+(1-M^2)Y^2=0 \end{gathered}$$

$$X^2+\frac{2M^2}{(M^2-1)}X+\frac{M^2}{(M^2-1)}+Y^2=0 \tag{C.9}$$

La ecuación C.9 es una cuadrática, y para analizarla completamos el cuadrado en X:

$$X^2+\frac{2M^2}{(M^2-1)}X+\frac{M^4}{(M^2-1)^2}+Y^2=\frac{M^4}{(M^2-1)^2}-\frac{M^2}{(M^2-1)}= \frac{M^4-M^2(M^2-1)}{(M^2-1)^2} \tag{C.10}$$

$$\left(X+\frac{M^2}{(M^2-1)}\right)^2+Y^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2}=\left(\frac{M}{(M^2-1)}\right)^2 \tag{C.11}$$

La ecuación (C.11) corresponde a la de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{M^2}{(M^2-1)},0\right)$ y radio $\frac{M}{(M^2-1)}$. Estas circunferencias se conocen como las *M-circunferencias*.

C.2. N-circunferencias

Empleando (C.6) y la identidad trigonométrica

$$\tan A-B=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

la ecuación (C.7) se convierte en

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X}\frac{Y}{1+X}}$$

que puede reescribirse como

$$N = \frac{\frac{Y+XY-XY}{X(1+X)}}{\frac{X+X^2+Y^2}{X(1+X)}} = \frac{Y + XY - XY}{X + X^2 + Y^2}$$

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{Y}{N} = 0 \tag{C.12}$$

La ecuación (C.12) corresponde a una cuadrática y para analizarla completamos los cuadrados en X y en Y

$$X^2 + X + \frac{1}{4} + Y^2 - \frac{Y}{N} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2+1}{4N^2} \tag{C.13}$$

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2+1}{4N^2} \tag{C.14}$$

La ecuación (C.14) corresponde a la de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$ y radio $\frac{1}{2N}\sqrt{N^2+1}$. Estas circunferencias se conocen como las *N-circunferencias*.

C.3. Carta de Nichols

Las ecuaciones (C.11) y (C.14) muestran que en un plano que tenga por ejes X y Y, es decir la parte real y la parte imaginaria de $G(j\omega)$, el lugar geométrico de las magnitudes y ángulos de $F(j\omega)$ constantes son las M-circunferencias y N-circunferencias respectivamente.

En la figura C.1 se muestran algunas de estas circunferencias, para unos valores específicos de la magnitud y el ángulo de $F(j\omega)$. Esta figura se conoce como la *Carta de Nichols en coordenadas rectangulares*. La principal utilidad de esta carta es la de poder determinar en forma gráfica el valor de $F(j\omega)$ a partir de $G(j\omega)$, es decir, calcular de forma gráfica la ecuación (C.2).

Sin embargo, resulta más sencillo conocer la magnitud y el ángulo de $G(j\omega)$ que sus partes real e imaginaria, empleando para ello los diagramas de Bode; por esta razón se propone trabajar con la *carta de Nichols en coordenadas polares* que se muestra en la figura C.2, cuyos ejes corresponden a la magnitud y ángulo de $G(j\omega)$. En estos ejes las M-circunferencias y N-circunferencias se distorsionan, y pierden su forma de circunferencia.

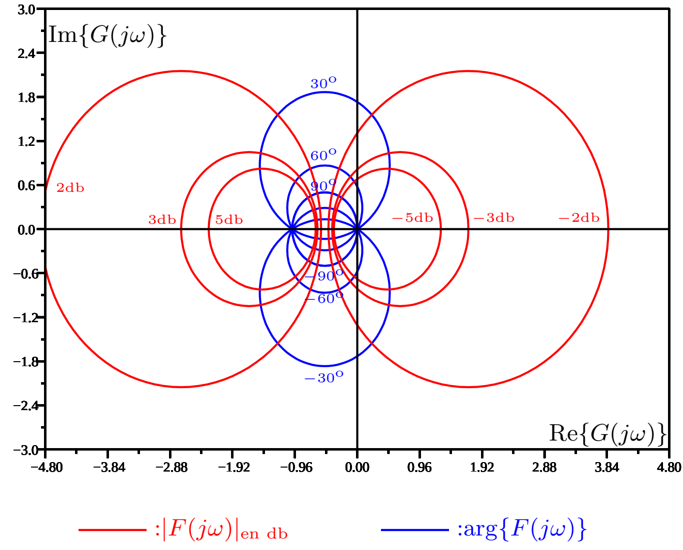


Figura C.1: Diagrama de Nichols en coordenadas rectangulares

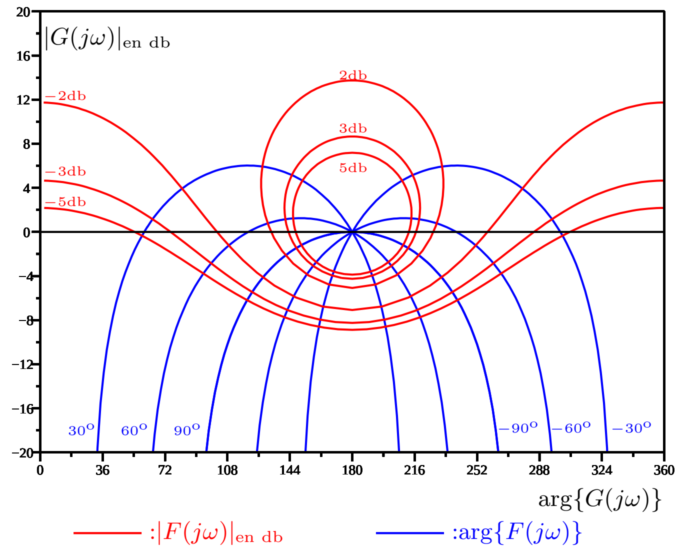


Figura C.2: Diagrama de Nichols en coordenadas polares

Apéndice D

Apuntes de álgebra lineal

D.1. Espacios vectoriales

D.1.1. Estructuras algebráicas básicas

Definición D.1 Grupo
Un conjunto Γ dotado de una operación binaria $\oplus$ tiene estructura de *grupo* si la operación satisface las siguientes propiedades:

G.1 **Clausurativa (Cerradura):** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \oplus y \in \Gamma$

G.2 **Asociativa:** $\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

G.3 **Modulativa:** $\exists\, 0 \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x \oplus 0 = x$

G.4 **Invertiva:** $\forall\, x \in \Gamma \quad \exists\, (-x) \mid x \oplus (-x) = 0$

Definición D.2 Grupo conmutativo
Un conjunto Γ dotado de una operación binaria $\oplus$ tiene estructura de *grupo conmutativo* o *grupo abeliano* si la operación satisface las propiedades de grupo y:

G.5 **Conmutativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \oplus y = y \oplus x$

Ejemplo D.1 El conjunto $\Gamma = \{a, b, c\}$ dotado con la operación $\oplus$ descrita en la tabla

$\oplus$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

tiene estructura algebráica de grupo conmutativo, en donde el módulo 0 de $\oplus$ es el elemento a.

Ejemplo D.2 El conjunto $\Gamma = \{0, 1\}$ dotado con la operación suma usual no tiene estructura de grupo porque no se satisface la propiedad clausurativa ($1 + 1 = 2 \notin \Gamma$). Sin embargo, con la operación $\oplus$ descrita en la tabla sí tiene estructura de grupo

$\oplus$	0	1
0	1	0
1	0	1

Definición D.3 Anillo
Un conjunto Γ dotado de dos operaciones binarias $\oplus$ y $\otimes$ tiene estructura de *anillo* si las operaciones satisfacen las siguientes propiedades.

Para la operación $\oplus$

R.1 **Clausurativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \oplus y \in \Gamma$

R.2 **Asociativa:** $\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

R.3 **Modulativa:** $\exists\, 0 \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x \oplus 0 = x$

R.4 **Invertiva:** $\forall\, x \in \Gamma \quad \exists\, (-x) \mid x \oplus (-x) = 0$

R.5 **Conmutativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \oplus y = y \oplus x$

Para la operación $\otimes$

R.6 **Clausurativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \otimes y \in \Gamma$

R.7 **Asociativa:** $\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

Para las dos operaciones

R.8 **Distributiva respecto a $\oplus$:** $\forall\, x, y, z \in \Gamma \quad x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Definición D.4 Anillo modulativo (anillo con unidad)
Un conjunto Γ dotado de dos operaciones binarias $\oplus$ y $\otimes$ tiene estructura de *anillo modulativo* o de *anillo con unidad* si las operaciones satisfacen las propiedades de anillo y además la operación $\otimes$ satisface:

R.9 **Modulativa:** $\exists\, 1 \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$

Definición D.5 Anillo conmutativo
Un conjunto Γ dotado de dos operaciones binarias $\oplus$ y $\otimes$ tiene estructura de *anillo conmutativo* si las operaciones satisfacen las propiedades de anillo y además la operación $\otimes$ satisface:

R.10 **Conmutativa:** $\forall\, x, y \in \Gamma \quad x \otimes y = y \otimes x$

Definición D.6 Campo
Un conjunto Γ dotado de dos operaciones binarias $\oplus$ y $\otimes$ tiene estructura de *campo* si tiene estructura de anillo conmutativo con unidad.

Ejemplo D.3 Algunos de los campos más conocidos son los reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$ y el conjunto de las funciones racionales de s con coeficientes reales $\mathbb{R}(s)$.

D.1.2. Definición de espacio vectorial

Definición D.7 espacio vectorial
Sea un conjunto Γ y $\mathbf{F}:(\Phi,\oplus,\otimes)$ un campo. A los elementos de Γ se les denomina *vectores*, y a los elementos de Φ *escalares*. Γ tiene estructura de *espacio vectorial sobre* $\mathbf{F}$ si está dotado de una operación binaria $+$ (suma vectorial) y una operación $\cdot$ entre elementos de Γ y Φ (producto por escalar) que cumplen las siguientes propiedades:

Para la suma vectorial

V.1 **Clausurativa:** $\forall\, x,y \in \Gamma \quad x+y \in \Gamma$

V.2 **Asociativa:** $\forall\, x,y,z \in \Gamma \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

V.3 **Modulativa:** $\exists\, \mathbf{0} \in \Gamma \mid \forall x \in \Gamma \quad x+\mathbf{0} = x$

V.4 **Invertiva:** $\forall\, x \in \Gamma \quad \exists\, (-x) \mid x+(-x) = \mathbf{0}$

V.5 **Conmutativa:** $\forall\, x,y \in \Gamma \quad x+y = y+x$

Para el producto por escalar

V.6 **Clausurativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha \in \Phi \quad \alpha \cdot x \in \Gamma$

V.7 **Asociativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall\, \alpha,\beta \in \Phi \quad (\alpha \otimes \beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

V.8 **Modulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 1 \cdot x = x$. 1 es el módulo de $\otimes$

V.9 **Anulativa:** $\forall\, x \in \Gamma,\ 0 \cdot x = \mathbf{0}$. En donde 0 es el módulo de $\oplus$, y $\mathbf{0}$ es el módulo de $+$

Para las dos operaciones

V.10 **Distributiva respecto a $+$:** $\forall\, x,y \in \Gamma,\ \forall \alpha \in \Phi \quad \alpha\cdot(x+y) = (\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y)$

V.11 **Distributiva respecto a $\oplus$:** $\forall\, x \in \Gamma,\ \forall \alpha,\beta \in \Phi \quad (\alpha\oplus\beta)\cdot x = (\alpha\cdot x)+(\beta\cdot x)$

Ejemplo D.4 Uno de los espacios vectoriales más conocidos, y que servirá para futuros ejemplos en este capítulo, es el formado por $\mathbb{R}^2$ sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales. En general, $\mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales forma un espacio vectorial.

Ejemplo D.5 El conjunto de todos los polinomios sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales entre polinomios forma un espacio vectorial.

Ejemplo D.6 El conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el campo $\mathbb{C}$ con la operación $+$ definida como la suma punto a punto, forma un espacio vectorial.

Ejemplo D.7 El conjunto de todas las matrices de tamaño fijo $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales entre matrices forma un espacio vectorial.

Definición D.8 Subespacio
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$; sea Ω un subconjunto de Γ. Si $W : (\Omega, +, \cdot, \mathbf{F})$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$ se dice que W es un *subespacio* de V.

Teorema D.1 Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$; sea Ω un subconjunto de Γ. $W : (\Omega, +, \cdot, \mathbf{F})$ es un subespacio de V si y sólo si $+$, $\cdot$ son cerradas en Ω.

Demostración D.1 Si $+$, $\cdot$ son cerradas en Ω se satisfacen V.1 y V.6. Las demás propiedades contenidas en la definición D.7 se satisfacen porque $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ es un espacio vectorial; por lo tanto $W(\Omega, +, \cdot, \mathbf{F})$ es un espacio vectorial y de acuerdo con la definición D.8, es un subespacio de V.

Ejemplo D.8 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, ya que la suma y el producto por escalar son operaciones cerradas en $\mathbb{R}^2$. En general si $n \leq m$ se tiene que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$

Ejemplo D.9 Una línea recta que cruce por el origen es un subsepacio de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, ya que: i) la suma de dos vectores que estén sobre una misma recta da otro vector sobre esa recta y ii) el producto por escalar de un vector da otro vector sobre la misma recta.

Ejemplo D.10 El conjunto de los polinomios de orden 2, es un subespacio del conjunto de los polinomios de orden 4 (con las operaciones usuales y sobre $\mathbb{R}$), ya que: i) la suma de dos polinomios de orden 2 da otro polinomio de orden 2 y ii) el producto de un polinomio de orden 2 por un escalar da otro polinomio de orden 2. Se entiende que un polinomio de orden n es un polinomio que no tiene monomios de orden superior a n.

D.1.3. Bases

Definición D.9 Combinación lineal
Sea $V : (\Gamma, \mathbf{F})$ un espacio vectorial. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ cualesquiera vectores y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ cualesquiera escalares de $\mathbf{F}$ denominados *coeficientes*. Una *combinación lineal* de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es la operación

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Definición D.10 Independencia lineal
Un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ es linealmente independiente si la única combinación lineal nula se obtiene con coeficientes nulos. Es decir, si

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Definición D.11 Dimensión
El máximo número de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V se denomina la *dimensión* de V.

Definición D.12 Conjunto generador
Dado un conjunto de vectores $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$; S es un *Conjunto generado* por X si es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de elementos de X; se dice que X es un *Conjunto generador* de S y se denota por

$$S = span(X) = \left\{ y \mid \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \;\; y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\}$$

Definición D.13 Base de un espacio vectorial
Un conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ es una *base* del espacio vectorial $V : (\Gamma, \mathbf{F})$ si B es linealmente independiente y genera a Γ.

Teorema D.2 En un espacio vectorial V de dimensión n, cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es una base de V.

Demostración D.2 Sea $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un conjunto arbitrario de n vectores linealmente independientes en V. Para demostrar que A es una base de V es necesario demostrar que cubre a V, es decir, que cualquier elemento x de V puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de A.

Debido a que A tiene n elementos, el conjunto $\{x, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ es linealmente dependiente (tiene $n+1$ elementos y n es el máximo número de vectores linealmente independientes) y por tanto existe una combinación lineal

$$\alpha_0 x + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \mathbf{0} \tag{D.1}$$

con algunos de los $\alpha_i \neq 0$. Es claro que $\alpha_0 \neq 0$ porque de lo contrario se obtendría

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \mathbf{0} \tag{D.2}$$

lo que implica que todos los α_i deberían ser cero ya que los elementos de A son linealmente independientes (son una base). Como $\alpha_0 \neq 0$ podemos despejar x

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} a_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} a_n \tag{D.3}$$

es decir, que existe una combinación lineal de los elementos de A cuyo resultado es x, y por lo tanto A genera el espacio vectorial V.

Definición D.14 Coordenadas de un vector
Sea x un elemento del espacio vectorial V, y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ una base de V. Si $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$ se dice que las *coordenadas* de x en la base B son los coeficientes de esa combinación lineal $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. Usualmente se agrupan en un vector

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Teorema D.3 Todo elemento x de un espacio vectorial V tiene unas únicas coordenadas en una determinada base $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

Demostración D.3 Según la definición D.14 B genera a V y por lo tanto existe al menos una combinación lineal de los elementos de B cuyo resultado es x, es decir, existen al menos unas coordenadas de x en la base B.

Para demostrar que estas coordenadas son únicas, supongamos que existen dos juegos de coordenadas diferentes $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$. Según la definición D.14 se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 b_1 & + & \alpha_2 b_2 & + & \cdots & + & \alpha_n b_n & = x \\ \beta_1 b_1 & + & \beta_2 b_2 & + & \cdots & + & \beta_n b_n & = x \end{array}$$

Al restar estas dos expresiones se obtiene

$$(\alpha_1 - \beta_1)b_1 + (\alpha_2 - \beta_2)b_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)b_n = \mathbf{0}$$

De acuerdo con la definición D.13, el conjunto $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto la única combinación lineal de sus elementos que es nula es la que tiene todos sus coeficientes nulos, por lo tanto $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ lo que significa que los dos juegos de coordenadas deben ser iguales.

Teorema D.4 Al aumentar los elementos de una base el conjunto resultante es linealmente dependiente.

Demostración D.4 Sea $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ una base de V y sea x un elemento cualquiera de V. Debido a que B genera a V es posible encontrar α_i tales que

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

y por tanto puede escribirse

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n - x = \mathbf{0}$$

Esta es una combinación lineal nula con coeficientes no nulos (al menos el coeficiente de x es -1) y por tanto el conjunto $\{b_1, b_2, \cdots, b_n, x\}$ es linealmente dependiente.

Teorema D.5 Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos que coincide con la dimensión del espacio vectorial.

Demostración D.5 Por el teorema D.2 sabemos que pueden existir bases de tamaño igual a la dimensión. Según las definiciones D.11 y D.13 no puede haber bases con un número mayor de elementos, debido a que este conjunto sería linealmente dependiente, por lo tanto sólo es necesario probar que no puede haber bases con un número de elementos inferior a la dimensión del espacio.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Supongamos dos bases B y A:

$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \qquad A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$$

con $r < n$. Según el teorema D.4 el conjunto $C_1 = \{b_1, a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ es linealmente dependiente y alguno de los elementos a_i es una combinación lineal de los otros elementos de C_1; supongamos que este a_i es justamente a_r, (en caso de que no lo sea, reorganizamos el conjunto y cambiamos los subíndices).

El espacio cubierto por C_1 es el mismo espacio cubierto por A y por $\{b_1, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}$, por lo tanto el conjunto $C_2 = \{b_2, b_1, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}$ es linealmente dependiente; de nuevo podemos argumentar que alguno de los elementos a_i es una combinación lineal de los otros elementos de C_2; supongamos que este a_i es justamente a_{r-1}.

Efectuando este procedimiento podemos construir en forma consecutiva C_3, C_4, $\cdots$, C_r, todos los cuales serán conjuntos linealmente dependientes. Sin embargo, C_r es

$$C_r = \{b_r, b_{r-1}, \cdots, b_2, b_1\}$$

que es un subconjunto de la base B y por lo tanto no puede ser linealmente dependiente. De esta forma demostramos que $r < n$ es una contradicción. Como consecuencia, todas las bases del espacio vectorial deben tener el mismo tamaño, que coincide con la dimensión del espacio.

Ejemplo D.11 Cualquier pareja de vectores no paralelos en el plano es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

Ejemplo D.12 El conjunto formado por los polinomios $\{1, t, t^2, t^3\}$ forma una base del espacio vectorial de los polinomios de orden 3.

Ejemplo D.13 El espacio vectorial de todos los polinomios tiene dimensión infinita. Una base de ese espacio es la formada por los polinomios $\{1, t, t^2, t^3, \cdots\}$

D.1.4. Cambio de base

Sean $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ dos bases del mismo espacio vectorial V de dimensión n. Definimos las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como las matrices que tienen en sus columnas cada uno de los elementos de las bases A y B respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Un vector x tendrá coordenadas α_i en la base A y β_i en la base B, de tal manera que

$$\begin{aligned} x = \quad & \alpha_1 a_1 & + \quad & \alpha_2 a_2 & + \quad & \cdots & + \quad & \alpha_n a_n \\ x = \quad & \beta_1 b_1 & + \quad & \beta_2 b_2 & + \quad & \cdots & + \quad & \beta_n b_n \end{aligned} \tag{D.4}$$

Definimos los vectores columna α y β que contienen las coordenadas:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

de tal manera que podemos reescribir (D.4) como

$$x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\alpha$$

$$x = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \mathbf{B}\beta$$

Igualando estas dos expresiones se encuentran las expresiones que permiten encontrar las coordenadas de x en una base a partir de sus coordenadas en la otra:

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha \tag{D.5}$$

En caso de que A sea la base estándar, la matriz $\mathbf{A}$ resulta ser la matriz identidad de orden n y (D.5) se convierte en

$$\alpha = \mathbf{B}\beta \qquad \beta = \mathbf{B}^{-1}\alpha \tag{D.6}$$

Ejemplo D.14 En $\mathbb{R}^2$ puede definirse una base con cualquier pareja de vectores no paralelos. Definamos por ejemplo $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $B = \{(3,1),(2,2)\}$ y $C = \{(-1,1)(-1,-1)\}$ (vectores rojos en la figura D.1).

Consideremos ahora el vector x en la figura D.1. Sus coordenadas en la base estándar A serán

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas de x en las bases B y C construimos las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ y empleamos (D.6)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

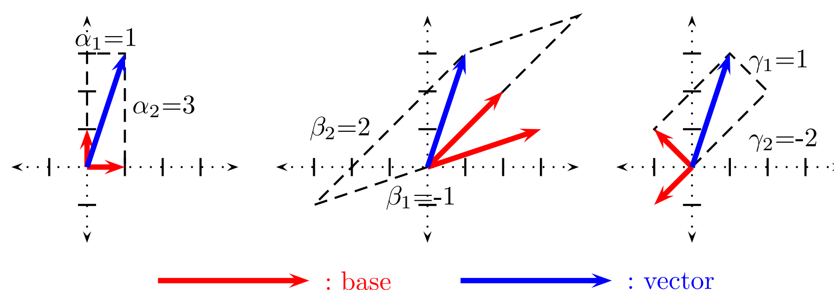


FIGURA D.1: Cambio de base de un vector

$$\beta = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\alpha = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/4 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\alpha = \begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ -1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

Puede verificarse que las coordenadas en las bases B y C satisfacen las relaciones (D.5)

$$\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\gamma \qquad \gamma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\beta$$

D.2. Transformaciones lineales

Definición D.15 Transformación lineal
Una *transformación lineal* es una función lineal entre dos espacios vectoriales. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbf{F}$. Sea T una función que toma elementos de V y les asigna elementos de W

$$T : V \to W \qquad \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{y} \in W$$

Si T satisface las condiciones de linealidad se dice que T es una transformación Lineal. T debe satisfacer:

$$\forall\, x_1, x_2 \in V\ \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{F} \quad T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \qquad \text{(D.7)}$$

Ejemplo D.15 La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ consistente en la proyección de los puntos en el plano xy es una transformación lineal. Esta función toma un punto (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ y le asigna la pareja (a, b) en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo D.16 La función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ consistente en la rotación de vectores 90^texto en sentido horario es una transformación lineal.

Ejemplo D.17 La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}$, en donde $\mathbb{P}$ es el espacio vectorial de los polinomios, consistente en la construcción de polinomios a partir de sus coeficientes es una transformación lineal. Esta función toma un punto (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ y le asigna un polinomio $a + bx + cx^2$ en $\mathbb{P}$.

Teorema D.6 Una transformación lineal T de un espacio V de dimensión n a un espacio W de dimensión m puede representarse por una matriz $\mathbf{T}$ de orden $m \times n$. La columna $i-$ésima de $\mathbf{T}$ contiene las coordenadas del resultado de aplicar T sobre el elemento i-ésimo de la base de V.

Demostración D.6 Sea $\mathbf{x}$ un elemento de V sobre el que se aplica la transformación T

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \tag{D.8}$$

Sea $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ una base sobre la cual $\mathbf{x}$ tiene coordenadas $\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n$, es decir, x puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$$

de tal manera que (D.8) es

$$\mathbf{y} = T(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n) \tag{D.9}$$

Debido a que T es una operación lineal y satisface (D.7), la ecuación (D.9) puede escribirse como

$$\mathbf{y} = \beta_1 T(b_1) + \beta_2 T(b_2) + \cdots + \beta_n T(b_n) \tag{D.10}$$

o en forma matricial

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} T(b_1) & T(b_2) & \cdots & T(b_n) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}\beta \tag{D.11}$$

Esto demuestra que la transformación lineal T se puede representar por $\mathbf{T}$, una matriz cuyas columnas son el resultado de aplicar T en cada una de las bases b_i. el tamaño de cada columna debe ser m, ya que el resultado está en W, que es de dimensión m, por lo tanto el orden de $\mathbf{T}$ es $m \times n$. Debe destacarse que el resultado $\gamma = \mathbf{u}^-1\mathbf{T}\beta$ realmente son las coordenadas de y en el espacio W en la base $\mathbf{u}$.

Ejemplo D.18 Podemos definir la transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ consistente en la rotación de vectores 90^texto en sentido horario (figura D.2). Si empleamos la base estándar, podemos construir la matriz $\mathbb{T}$ calculando la transformación de cada uno de los vectores de la base:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

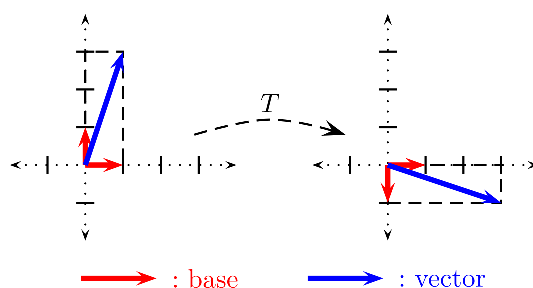


FIGURA D.2: Rotación de 90º en sentido horario

Si deseamos efectuar la rotación sobre un vector $\mathbf{x}$ de coordenadas $(1,3)$ debemos efectuar la operación

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

D.2.1. Transformaciones y cambios de base

El teorema D.6 permite efectuar transformaciones lineales mediante productos matriciales. Al cambiar de base, la matriz $\mathbf{T}$ que representa la transformación lineal sufre unos cambios, según se presenta a continuación.

Teorema D.7 Sea T una transformación lineal, que en la base estándar se representa por la matriz $\mathbf{T}_\alpha$. La misma transformación se representará en otra base $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ por $\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B}$ en donde $\mathbf{B} = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n]$

Demostración D.7 Supóngase que el vector $\mathbf{x}$ se transforma en el vector $\mathbf{y}$ mediante la transformación T. Sean α_x y β_x las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base estándar y en la base B, respectivamente. Sean también α_y y β_y las coordenadas de $\mathbf{y}$ en esas mismas bases. De acuerdo con el teorema D.6 T podrá representarse en cada una de esas bases como

$$\alpha_y = \mathbf{T}_\alpha \alpha_x \qquad \beta_y = \mathbf{T}_\beta \beta_x$$

Las coordenadas en la base B pueden escribirse en función de las coordenadas de la base estándar empleando (D.6)

$$\beta_y = \mathbf{B}^{-1}\alpha_y \qquad \beta_x = \mathbf{B}^{-1}\alpha_x$$

y por tanto

$$\mathbf{B}^{-1}\alpha_y = \mathbf{T}_\beta \mathbf{B}^{-1}\alpha_x$$
$$\alpha_y = \mathbf{B}\mathbf{T}_\beta \mathbf{B}^{-1}\alpha_x$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{B}\mathbf{T}_\beta\mathbf{B}^{-1} \qquad \mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B} \tag{D.12}$$

Teorema D.8 Sea T una transformación lineal, que en la base estándar se representa por $\mathbf{T}_\alpha$. La misma transformación se representará en otra base $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ por la matriz $\mathbf{T}_\beta$. La misma transformación se representará en otra base $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ por $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}_\beta\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ en donde $\mathbf{B} = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n]$ y $\mathbf{C} = [c_1\, c_2\, \cdots\, c_n]$

Demostración D.8 Empleando D.12 podemos escribir $\mathbf{T}_\alpha$ como

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{B}\mathbf{T}_\beta\mathbf{B}^{-1} \qquad \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{C}\mathbf{T}_\gamma\mathbf{C}^{-1}$$

Igualando se tiene

$$\mathbf{B}\mathbf{T}_\beta\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{T}_\gamma\mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}_\beta\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$$

Ejemplo D.19 En el ejemplo D.18 se mostró que la rotación de 90^texto en sentido horario estaba representada en la base estándar por la matriz

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La misma transformación se representará en la base $B = \{(3,1), (2,2)\}$ por la matriz

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}_\alpha\mathbf{B}$$

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2.5 & -2 \end{bmatrix}$$

Supóngase ahora el vector $\mathbf{x}$, cuyas coordenadas en la base estándar son $\alpha_x = (1,3)$ y en la base B son $\beta_x = (-1,2)$ (ejemplo D.14). Al efectuar la rotación de 90^texto en sentido horario se obtendrá un vector $\mathbf{y}$ cuyas coordenadas en la base estándar serán α_y y en la base B serán β_y:

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \beta_y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

D.3. Normas de vectores y matrices

Definición D.16 Producto interno
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F} : (\mathbf{\Phi}, \oplus, \otimes)$. Una operación $P : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{F}$ se denomina *producto interno* o *producto interior* si satisface las siguientes condiciones

P.1 $\forall x_1 \in \Gamma \quad P(x_1, x_1) \geq 0$ La igualdad se cumple sólo si $x_1 = \mathbf{0}$

P.2 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \Gamma \quad P(x_1 + x_2, x_3) = P(x_1, x_3) \oplus P(x_2, x_3)$

P.3 $\forall x_1, x_2 \in \Gamma \; \forall \alpha \in \mathbf{F} \quad P(\alpha x_1, x_2) = \alpha \otimes P(x_1, x_2)$

P.4 $\forall x_1, x_2 \in \Gamma \quad P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$

Ejemplo D.20 El producto escalar usual es un producto interno. Se define como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

en donde x_i, y_i son las coordenadas de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ respectivamente, y la dimensión del espacio es n,

Definición D.17 Norma de un vector
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F} : (\mathbf{\Phi}, \oplus, \otimes)$. Una operación $\| \cdot \| : \Gamma \rightarrow \mathbf{F}$ es una *función de Norma* si satisface las siguientes condiciones

N.1 $\forall x \in \Gamma \quad \|x\| \geq 0$

N.2 $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = \mathbf{0}$

N.3 $\forall x \in \Gamma \; \forall \alpha \in \mathbf{F} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \otimes \|x\|$

N.4 $\forall x_1, x_2 \in \Gamma \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| \oplus \|x_2\|$

Ejemplo D.21 Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, y sea $P(x_1, x_2)$ un producto interno de ese espacio. Si la cantidad

$$\|x\| = +\sqrt{P(x, x)}$$

es una función de norma se dice que es una *norma inducida por el producto interno* P. El signo $+$ resalta que se trata de la raíz positiva del producto interno de x consigo mismo.

Ejemplo D.22 Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ las coordenadas del vector x. En esas condiciones, las siguientes funciones son funciones de normas:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
3. $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$
4. $\|x\|_\infty = \text{máx}_i \, x_i$

5. $\|x\|_A = x^T A x$ con A una matriz cuadrada positiva definida[1].

Definición D.18 Distancia entre vectores
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F} : (\mathbf{\Phi}, \oplus, \otimes)$, y sea $\|\cdot\|$ una norma definida en ese espacio vectorial. Se define la *distancia* entre los vectores x_1 y x_2 como la operación $d : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{F}$ tal que

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$$

Toda función de distancia satisface las siguientes propiedades:

d.1 $\forall x_1, x_2 \in \Gamma \quad d(x_1, x_2) \geq 0$

d.2 $d(x_1, x_2) = 0$ si y sólo si $x_1 = x_2$

d.3 $\forall x_1, x_2 \in \Gamma \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

d.4 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \Gamma \quad d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) \oplus d(x_3, x_2)$

Definición D.19 Vector normal
Un vector es *normal* si su norma es 1

Definición D.20 Bola unitaria
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, y sea $d(x_1, x_2)$ una función de distancia definida en ese espacio vectorial. Se define la *bola unitaria* como el conjunto de todos los vectores cuya distancia al origen sea 1. También puede definirse de forma equivalente como el conjunto de todos los vectores cuya norma sea 1, o lo que es igual, el conjunto de todos los vectores normales.

Ejemplo D.23 La figura D.3 muestra las bolas unitarias para tres funciones de distancia diferentes, originadas las siguientes normas $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ y $\|x\|_A$ definidas en el Ejemplo D.22, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Se ha tomado

$$A = \begin{bmatrix} 7/4 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 5/4 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un espacio de dimensión 2 se emplea el término *circunferencia unitaria* en lugar de *bola unitaria*

Definición D.21 Ángulo entre vectores
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, sea $P(x_1, x_2)$ un producto interno definido en ese espacio, y $\|\cdot\|$ la norma inducida por P. Se define el *ángulo* θ entre los vectores x_1 y x_2 mediante $\cos\theta$ así:

$$\cos\theta = \frac{P(x_1, x_2)}{\|x_1\|\,\|x_2\|}$$

[1]Una matriz cuadrada $n \times n$ real se dice positiva definida, notada por $A > 0$, si para cualquier vector x de tamaño $n \times 1$ se tiene que $x^T A x \geq 0$, y la igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

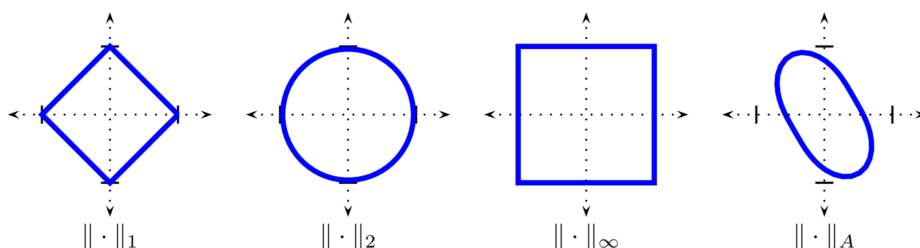


FIGURA D.3: Circunferencias Unitarias para diferentes normas

Definición D.22 Vectores ortogonales
Un conjunto de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ es *ortogonal* si

$$P(x_i, x_j)\begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Definición D.23 Vectores ortonormales
Un conjunto de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ es *ortonormal* si es ortogonal y todos sus vectores son normales, es decir, si

$$P(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

en donde δ_{ij} se conoce como la función *delta de Kronecker*

Teorema D.9 Los elementos de un conjunto ortogonal de vectores son linealmente independientes.

Demostración D.9 Supóngase un conjunto ortogonal $x_1, x_2, \cdots, x_k$ y construyamos una combinación lineal nula de ellos:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Si seleccionamos un vector cualquiera x_j y efectuamos el producto interno a cada lado de la ecuación tenemos

$$\alpha_1 P(x_1, x_j) + \alpha_2 P(x_2, x_j) + \cdots + \alpha_n P(x_n, x_j) = 0$$

Como se trata de un sistema ortogonal el único $P(x_i, x_j) \neq 0$ es $P(x_j, x_j) = P_i$ y por lo tanto

$$\alpha_j P(x_j, x_j) = \alpha_j P_i = 0$$

Y por tanto

$$\alpha_j = 0$$

Esta conclusión se puede obtener para todos los coeficientes α, por lo tanto la única combinación lineal nula de los vectores es la que tiene coeficientes nulos, es decir, los vectores son linealmente independientes.

Definición D.24 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt
Sea $V : (\Gamma, +, \cdot, \mathbf{F})$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, sea $P(x_1, x_2)$ un producto interno definido en ese espacio, y $\|\cdot\|$ la norma inducida por P. Dado un conjunto de vectores linealmente independientes $x_1, x_2, \cdots, x_k$ es posible encontrar un conjunto de vectores ortonormales $y_1, y_2, \cdots, y_k$ siguiendo el *proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt*:

$$
\begin{aligned}
y_1 =& \frac{x_1}{\|x_1\|} \\
y_2 =& \frac{x_2 - P(x_2, y_1)y_1}{\|x_2 - P(x_2, y_1)y_1\|} \\
y_3 =& \frac{x_3 - P(x_3, y_1)y_1 - P(x_3, y_2)y_2}{\|x_3 - P(x_3, y_1)y_1 - P(x_3, y_2)y_2\|} \\
&\vdots \\
y_k =& \frac{x_k - \sum_{j=1} k - 1P(x_k, y_j)y_j}{\|x_k - \sum_{j=1} k - 1P(x_k, y_j)y_j\|}
\end{aligned}
$$

Definición D.25 Norma de una matriz cuadrada
Sea $\mathbf{A}$ una matriz que representa una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Se define la *norma* de la matriz $\mathbf{A}$ inducida por una norma vectorial como

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Es decir, la norma de una matriz es la norma más grande que se obtiene al aplicar la transformación lineal sobre los elementos de la bola unitaria.

Ejemplo D.24 Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\|A\|_1$ aplicamos la transformación $\mathbf{A}$ a la circunferencia unitaria de la norma $\|\cdot\|_1$, tal como se muestra en la figura D.4.

La mayor distancia al origen que resulta es, según la norma $\|\cdot\|_1$, la correspondiente a los puntos $(1, 3)$ y $(-1, -3)$, por lo tanto

$$\|A\|_1 = |1| + |3| = 4$$

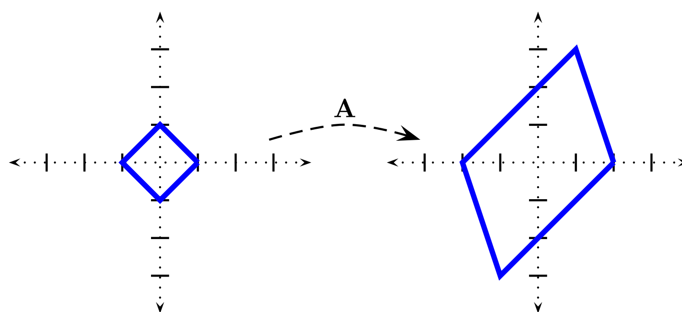


FIGURA D.4: Norma de una matriz basada en $\|\cdot\|_1$

Ejemplo D.25 Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\|A\|_2$ aplicamos la transformación $\mathbf{A}$ a la circunferencia unitaria de la norma $\|\cdot\|_2$, tal como se muestra en la figura D.5.

La mayor distancia al origen que resulta es, según la norma $\|\cdot\|_2$, la marcada en la figura D.5 como d. Es un ejercicio interesante demostrar que esta distancia corrresponde a los puntos $(1.536, 2.871)$ y $(-1.536, -2.871)$ por lo tanto[2]

$$\|A\|_2 = \sqrt{1.536^2 + 2.871^2} = 3.256$$

También puede demostrarse que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sqrt{13} + 7} = 3.256$$

Ejemplo D.26 Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\|A\|_\infty$ aplicamos la transformación $\mathbf{A}$ a la circunferencia unitaria de la norma $\|\cdot\|_\infty$, tal como se muestra en la figura D.6.

La mayor distancia al origen que resulta es, según la norma $\|\cdot\|_\infty$, la correspondiente a cualquiera de los puntos cuya segunda coordenada es 3 o -3, por ejemplo $(1, 3)$, por lo tanto

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{1, 3\} = 3$$

[2]Un punto de $(\cos\phi, \sin\phi)$ de la circunferencia unitaria se transforma en $(2\cos\phi + \sin\phi, 3\sin\phi)$; su distancia al origen r es tal que $r^2 = (2\cos\phi + \sin\phi)^2 + (3\sin\phi)^2$, que puede escribirse como $r^2 = 2\sin 2\phi - 3\cos 2\phi + 7$. Los puntos críticos corresponden a $dr^2/d\phi = 0$, es decir a $\phi = \frac{1}{2}\tan^{-1}(-\frac{2}{3})$; el máximo corresponde a $\phi = 73.15^o$

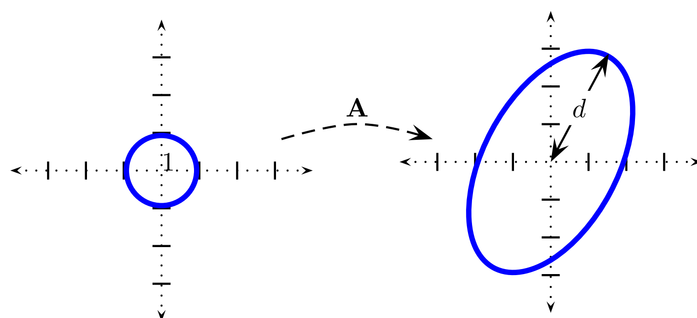


Figura D.5: Norma de una matriz basada en $\| \cdot \|_2$

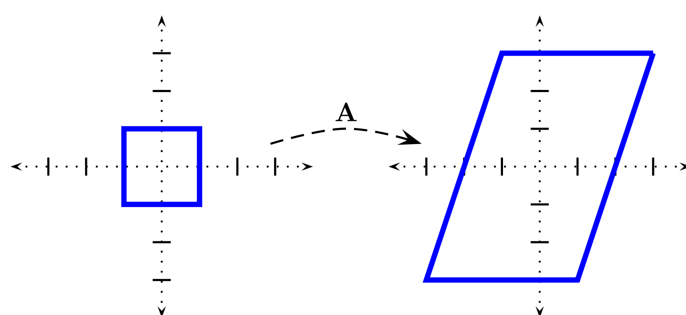


Figura D.6: Norma de una matriz basada en $\| \cdot \|_\infty$

D.4. Sistemas de ecuaciones algebráicas

El propósito de esta sección es el de presentar algunas propiedades de las matrices. Para ello, consideramos el sistema de ecuaciones algebráicas:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{gathered} \tag{D.13}$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{D.14}$$

La ecuación (D.14) puede interpretarse como el sistema de ecuaciones algebráicas (D.13), como una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o en general como una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión n a otro espacio vectorial de dimensión m $A : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$.

Empleamos esta múltiple interpretación para hacer algunas definiciones y obtener ciertas conclusiones acerca de la existencia y unicidad del sistema de la solución del sistema de ecuaciones algebráicas.

Definición D.26 Codominio
El *Codominio* de un operador lineal $\mathbf{A}$ es el conjunto $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ definido como

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} | \exists \mathbf{x},\ \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}$$

Teorema D.10 El codominio de un operador lineal $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.

Demostración D.10 Es claro que el codominio $\mathbf{A}$ es un subconjunto de $\mathbf{W}$, es decir $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{W}$. Supónganse dos vectores $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Según la definición D.26 existen dos vectores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ en $\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Ax}_1 \qquad \mathbf{y}_2 = \mathbf{Ax}_2$$

Gracias a la linealidad de $\mathbf{A}$ cualquier combinación lineal de $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ puede escribirse como

$$\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 = \alpha_1\mathbf{Ax}_1 + \alpha_2\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2)$$

es decir, para cualquier combinación lineal de $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ es posible encontrar un elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ y por lo tanto según el teorema D.1 $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.

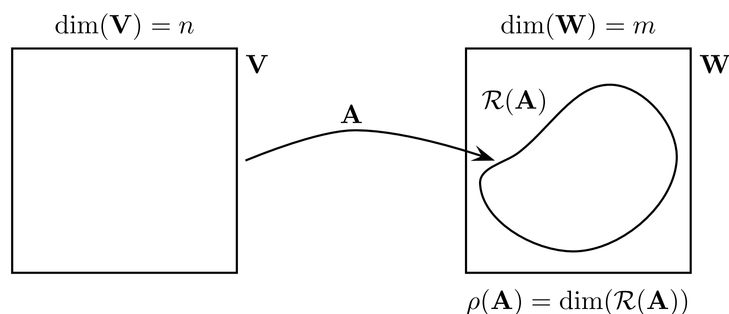


FIGURA D.7: Codominio y rango de un operador lineal

Definición D.27 Rango
El *rango* de una matriz $\mathbf{A}$, denotado por $\rho(\mathbf{A})$ es la dimensión del codominio del operador lineal representado por $\mathbf{A}$ (ver figura D.7).

Teorema D.11 El rango de una matriz $\mathbf{A}$ es igual al número de columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$.

Demostración D.11 Si denotamos la $i-$ésima columna de $\mathbf{A}$ como $\mathbf{a}_i$, es decir $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ la ecuación D.14 puede escribirse como

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

es decir, $\mathbf{y}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$ cuyos coeficientes son $x_1, x_2, \cdots, x_n$. El codominio de $\mathbf{A}$ será entonces el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}$, es decir $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$; por lo tanto la dimensión de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, que es $\rho(\mathbf{A})$, será igual al número de elementos linealmente independientes en el conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$.

Ejemplo D.27 Considérese la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ representada por $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en donde $\mathbf{A}$ es la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esa transformación toma un punto (x_1, x_2) en el plano y lo convierte en un punto sobre el eje horizontal (figura D.8):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

El codominio de $\mathbf{A}$, que denotamos por $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ resulta ser el eje horizontal, es decir, un subespacio de $\mathbf{R}^2$. La dimensión de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, que es el rango de $\mathbf{A}$, denotado por $\rho(\mathbf{A})$ es entonces 1. Nótese que el número de columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$ también es 1.

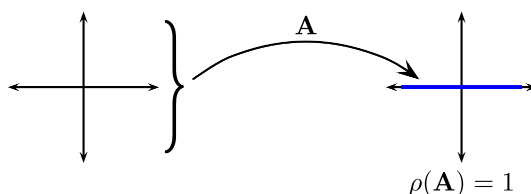


FIGURA D.8: Codominio y rango del operador lineal del ejemplo D.27

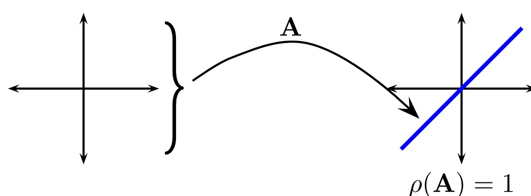


FIGURA D.9: Codominio y rango del operador lineal del ejemplo D.27

Ejemplo D.28 Considérese la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ representada por $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en donde $\mathbf{A}$ es la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esa transformación toma un punto (x_1, x_2) en el plano y lo convierte en un punto sobre la recta de pendiente 1 (figura D.9):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + 2x_2) \\ (x_1 + 2x_2) \end{bmatrix}$$

El codominio de $\mathbf{A}$, que denotamos por $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ resulta ser la recta identidad, es decir, un subespacio de $\mathbf{R}^2$. La dimensión de $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, que es el rango de $\mathbf{A}$, denotado por $\rho(\mathbf{A})$ es entonces 1. Nótese que el número de columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$ también es 1.

En el teorema D.14 se demuestra que el rango de una matriz no se altera al premultiplicarla o posmultiplicarla por matrices no singulares. Esto significa que las operaciones elementales sobre matrices no alteran el rango de una matriz y por lo tanto puede comprobarse que el rango también es igual al número de

filas linealmente independientes de la matriz, es decir, para una matriz $\mathbf{A}$ de dimensiones $m \times n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{A}) &= \text{Número de columnas L.I.} \\ \rho(\mathbf{A}) &= \text{Número de filas L.I.} \\ \rho(\mathbf{A}) &\leq \text{mín}\,(m,n) \end{aligned} \tag{D.15}$$

Además, puede demostrarse que una matriz es no singular si y sólo si todas sus filas y todas sus columnas son linealmente independientes,

Teorema D.12 El sistema de ecuaciones (D.14) donde $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ tiene solución para todo $\mathbf{y}$ en $\mathbf{W}$ si y solo si $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{W}$, o lo que es equivalente, si y solo si $\rho(\mathbf{A}) = m$

Demostración D.12 La demostración se desprende directamente de las definiciones D.26 y D.27.

Definición D.28 Espacio Nulo
El *Espacio Nulo* de un operador lineal $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es el conjunto $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ definido como

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} |\ \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$$

La linealidad del operador permite demostrar que el Espacio Nulo es un Subespacio de $\mathbf{V}$. Esto permite hacer la siguiente definición:

Definición D.29 Nulidad
La *Nulidad* de un operador lineal $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, denotada por $\nu(\mathbf{a})$ es la dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$

El ejemplo D.29 muestra la relación existente entre el rango y la nulidad de un operador lineal $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, con $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$ (figura D.10).

$$\rho(\mathbf{A}) + \nu(\mathbf{A}) = n = \dim(\mathbf{V}) \tag{D.16}$$

Teorema D.13 El sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ tiene una solución distinta de la trivial si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) < n$. Si $m = n$ esto es equivalente a decir si y sólo si $\det(\mathbf{A}) = 0$

Demostración D.13 De la definición D.29 se desprende que el número de soluciones linealmente independientes de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es $\nu(\mathbf{A})$. Para que exista una solución no trivial se necesita que $\nu(\mathbf{A}) \geq 1$. Empleando (D.16) esta condición se convierte en $\rho(\mathbf{A}) < n$. Si $m = n$ entonces $\mathbf{A}$ es cuadrada y la condición es equivalente a $\det(\mathbf{A}) = 0$, ya que las columnas de $\mathbf{A}$ serían linealmente dependientes.

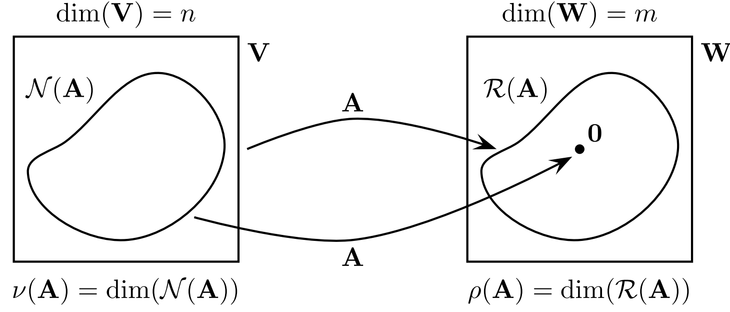


FIGURA D.10: Codominio, espacio nulo, rango y nulidad de un operador lineal

Ejemplo D.29 Supóngase el sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz 5×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$$

en donde las dos primeras columnas son linealmente independientes, pero las últimas tres no lo son ($\rho(\mathbf{A}) = 2$), ya que pueden escribirse como combinaciones lineales de las dos primeras:

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \qquad \mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 \qquad \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \tag{D.17}$$

El sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ puede escribirse como

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.18}$$

Empleando (D.17) la ecuación (D.18) se convierte en

$$(x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 + x_3 - x_5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.19}$$

$$(x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5)\mathbf{a}_1 + (x_2 + x_3 - x_5)\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \tag{D.20}$$

Como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son linealmente independientes, (D.20) sólo puede cumplirse si los coeficientes son cero, es decir si

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ \quad x_2 + x_3 - x_5 & = 0 \end{cases} \tag{D.21}$$

El sistema de ecuaciones (D.21) tiene 5 incógnitas y 2 ecuaciones linealmente independientes, es decir, existen 3 grados de libertad para escoger los valores de

x_i. Dicho de otra forma, $\nu(\mathbf{A}) = 3$. Nótese que $\rho(\mathbf{A}) + \nu(\mathbf{A}) = n$ $(2 + 3 = 5)$, cumpliendo con la ecuación (D.16).

Podemos escoger arbitrariamente los valores de 3 de las incógnitas x_i y deducir el valor de las otras dos, para construir una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Si seleccionamos x_1, x_2 y x_3 como los tríos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tendremos los tres vectores base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema D.14 Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ y $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ dos matrices no singulares cualesquiera $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente. En esas condiciones se tiene que

$$\rho(\mathbf{AC}) = \rho(\mathbf{A}) \qquad \rho(\mathbf{DA}) = \rho(\mathbf{A})$$

Demostración D.14 La demostración se apoya en la desigualdad de Sylvester, que establece que si existen dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de dimensiones $q \times n$ y $n \times p$ entonces

$$\rho(\mathbf{A}) + \rho(\mathbf{B}) - n \geq \rho(\mathbf{AB}) \geq \text{mín}(\rho(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{B})) \tag{D.22}$$

Al aplicar (D.22) a $\mathbf{AC}$ y $\mathbf{DA}$ se tiene que

$$\rho(\mathbf{A}) + \rho(\mathbf{C}) - n \geq \rho(\mathbf{AC}) \geq \text{mín}(\rho(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{C}))$$

$$\rho(\mathbf{D}) + \rho(\mathbf{A}) - m \geq \rho(\mathbf{DA}) \geq \text{mín}(\rho(\mathbf{D}), \rho(\mathbf{A}))$$

como $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son no singulares, sus rangos son n y m respectivamente:

$$\rho(\mathbf{A}) + n - n \geq \rho(\mathbf{AC}) \geq \text{mín}(\rho(\mathbf{A}), n)$$

$$m + \rho(\mathbf{A}) - m \geq \rho(\mathbf{DA}) \geq \text{mín}(m, \rho(\mathbf{A}))$$

Por (D.15) se sabe que $\rho(\mathbf{A}) \leq \text{mín}\,(m, n)$, por lo tanto

$$\rho(\mathbf{A}) \geq \rho(\mathbf{AC}) \geq \rho(\mathbf{A})$$

$$\rho(\mathbf{A}) \geq \rho(\mathbf{DA}) \geq \rho(\mathbf{A})$$

Las desigualdades sólo pueden cumplirse simultáneamente si se tiene que

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{AC}) \qquad \rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{DA})$$

D.5. Valores y vectores propios

Definición D.30 Valor propio y vector propio[3]
Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Un escalar λ es un *valor propio* si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Cualquier vector no nulo $\mathbf{v}$ que satisfaga

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \tag{D.23}$$

es un *vector propio* asociado al valor propio λ.

La definición D.30 implica que para un vector propio $\mathbf{v}$ el efecto de aplicarle la transformación lineal $\mathbf{A}$ es igual que amplificarlo por el escalar λ. Esto implica que un vector y el vector transformado son colineales o paralelos y por lo tanto linealmente dependientes.

La definición D.30 se refiere estrictamente a *valores y vectores propios por derecha*, para distinguirlos de los *valores y vectores propios por izquierda*, que deben satisfacer $\mathbf{v^t A} = \lambda\mathbf{v^t}$. En este texto sólo se consideran los primeros, y por tanto se hace referencia a ellos simplemente como *valores y vectores propios*.

Teorema D.15 λ es un valor propio de $\mathbf{A}$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{D.24}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de igual orden que $\mathbf{A}$.

Demostración D.15 Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$ entonces existe un vector $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \qquad \mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

El término $\lambda\mathbf{v}$ puede escribirse como $\lambda\mathbf{Iv}$ para facilitar la factorización de $\mathbf{v}$

$$\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{Iv} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

De acuerdo con el teorema D.13 esta ecuación tiene solución no trivial (existe un vector propio $\mathbf{v}$) si y sólo si

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Como el determinante de una matriz no se afecta al multilpicar ésta por un escalar no nulo, podemos escribir

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

El teorema D.15 brinda una posibilidad para calcular los valores propios de $\mathbf{A}$: podemos construir el *polinomio característico* $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y encontrar sus raíces. Cada raíz de $\Delta(\lambda)$ será un valor propio de $\mathbf{A}$. Los vectores propios pueden obtenerse directamente de (D.23).

Debido a que los valores propios resultan ser las raíces del polinomio característico, éstos pueden ser reales o complejos, diferentes o repetidos.

[3]También se conocen como *autovalores* y *autovectores* o *valores característicos* y *vectores característicos*.

Definición D.31 Multiplicidad
La multiplicidad r_i de un valor propio λ_i es el número de veces que éste aparece como raíz del polinomio característico.

Ejemplo D.30 Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 4) & -1 \\ 2 & (\lambda - 1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\mathbf{A})$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$ deben cumplir (D.23):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{11} + v_{21} \\ -2v_{11} + v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{11} \\ 2v_{21} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{11} + v_{21} & = 2v_{11} \\ -2v_{11} + v_{21} & = 2v_{21} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{11} o para v_{21}. Por ejemplo, si escogemos $v_{11} = 1$ obtenemos $v_{21} = -2$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$ será

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$ también deben cumplir (D.23):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4v_{12} + v_{22} \\ -2v_{12} + v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_{12} \\ 3v_{22} \end{bmatrix}$$

Se crea entonces un segundo sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 4v_{12} + v_{22} & = 3v_{12} \\ -2v_{12} + v_{22} & = 3v_{22} \end{cases}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ podemos escoger arbitrariamente un valor para v_{12} o para v_{22}. Por ejemplo, si escogemos $v_{12} = 1$ obtenemos $v_{22} = -1$. En consecuencia, un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ será

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.31 Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ 1 & (\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 2)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\lambda)$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm j$$

Al aplicar (D.23) para λ_1 y λ_2 se obtienen dos sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2v_{11} + v_{21} & = (2 + j)v_{11} \\ -v_{11} + 2v_{21} & = (2 + j)v_{21} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_{12} + v_{22} & = (2 - j)v_{12} \\ -v_{12} + 2v_{22} & = (2 - j)v_{22} \end{cases}$$

Seleccionando arbitrariamente $v_{11} = 1$ y $v_{12} = 1$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

o en general

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ ja \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -ja \end{bmatrix}$$

D.5.1. Valores propios diferentes

Teorema D.16 Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal con valores propios no repetidos, y sea $\mathbf{v}_i$ un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_i. En esas condiciones $\mathbf{v}_i$ es directamente proporcional a cualquier columna no nula de adj$(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})$

Demostración D.16 La demostración se basa en que para una matriz $\mathbf{P}$ se tiene que

$$\mathbf{P}\text{adj}\mathbf{P} = \det(\mathbf{P})\mathbf{I} \tag{D.25}$$

Al aplicar (D.25) a la matriz $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se tiene

$$(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\text{adj}(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I}$$

Como $\mathbf{v}_i$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_i, entonces $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ o lo que es igual

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \tag{D.26}$$

lo que implica que $\det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ y por tanto

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\text{adj}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \tag{D.27}$$

Comparando (D.26) y (D.27) se concluye que $\mathbf{v}_i$ es directamente proporcional a cualquier columna no nula de adj$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Ejemplo D.32 Para obtener los vectores propios del ejemplo D.30 construimos

$$\text{adj}(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj}(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{adj}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Teorema D.17 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores característicos diferentes de $\mathbf{A}$, y sea $\mathbf{v}_i$ un vector característico asociado a λ_i con $i = 1, 2, \cdots, r$. El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente.

Demostración D.17 Efectuamos la demostración por contradicción. Suponemos que los $\mathbf{v}_i$ son linealmente dependientes, y por lo tanto existen α_i algunos de los cuales no son nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Suponemos que $\alpha_1 \neq 0$, (si es necesario reordenamos los vectores) y multiplicamos a cada lado de la ecuación por $\prod_{j=2}^{r} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$

$$\prod_{j=2}^{r} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \tag{D.28}$$

El producto $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{v}_i$ se puede calcular como

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \begin{cases} (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{v}_i & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{0} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Y por lo tanto (D.28) se convierte en

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\cdots(\lambda_1 - \lambda_r)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

Por hipótesis, todos los λ_i son diferentes y $\mathbf{v}_1$ es no nulo (es un vector propio), lo que significa que $\alpha_1 = 0$. Con esta contradicción se concluye la demostración.

Teorema D.18 Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$; sean λ_i los valores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}_i$ un vector propio asociado a λ_i, con $i = 1, 2, \cdots, n$. Si todos los λ_i son diferentes, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$.

Demostración D.18 Según el teorema D.17 el conjunto es linealmente independiente. Como además tiene n elementos, según el teorema D.2 el conjunto es una base.

Teorema D.19 Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$; sean λ_i los valores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}_i$ un vector propio asociado a λ_i, con $i = 1, 2, \cdots, n$. Si todos los λ_i son diferentes, entonces la transformación lineal $\mathbf{A}$ se representa en la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ por una matriz diagonal $\boldsymbol{\Delta}$ en la que el elemento $i-$ésimo de la diagonal es λ_i.

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{D.29}$$

Demostración D.19 El teorema D.7 permite obtener la representación de $\mathbf{A}$ en la nueva base. Si denotamos esta representación por $\hat{\mathbf{A}}$ tendremos

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

con $\mathbf{M}$ la *matriz modal* que contiene los vectores propios

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Para demostrar el teorema construimos $\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Delta}$ y demostramos $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$, o lo que es equivalente, $\mathbf{M}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$:

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Calculamos por separado $\mathbf{M}\hat{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{D.30}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{D.31}$$

Como $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ entonces las ecuaciones (D.30) y (D.31) se reducen a $\mathbf{M}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$ o lo que es igual

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

Ejemplo D.33 La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son (Ejemplo D.30) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\}$ por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.34 La transformación lineal representada por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son (Ejemplo D.31) $\lambda_{1,2} = 2 \pm j$ con vectores propios $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

Tiene una representación en la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\}$ por la matriz diagonal

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} =$$
$$\begin{bmatrix} j/2 & -j/2 \\ j/2 & j/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j & 0 \\ 0 & 2-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

D.5.2. Valores propios repetidos

La diagonalización planteada en el teorema D.19 no siempre es posible si existen valores propios repetidos. Esto se debe a que el teorema D.17 se refiere a valores propios distintos, y sin ese resultado no puede asegurarse que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ sea una base. Esto se traduce en que la matriz modal $\mathbf{M}$ puede ser singular, y por tanto (D.29) no puede usarse debido a que $\mathbf{M}^{-1}$ puede no existir.

Definición D.32 Degeneracidad
El número de vectores propios de una transformación lineal $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ linealmente independientes asociados a un valor propio λ_i es la *degeneracidad* del valor propio λ_i, denotada por d_i.

Teorema D.20 La degeneracidad de λ_i, un valor propio de una transformación lineal $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ es igual a

$$d_i = n - \rho(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \tag{D.32}$$

Demostración D.20 Un vector propio $\mathbf{v}_i$ de $\mathbf{A}$ asociado a λ_i debe cumplir

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v} \qquad (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i = 0$$

Según la definición D.29, el número de vectores propios linealmente independientes serán entonces la nulidad de la matriz que premultiplica al vector,

$$d_i = \nu(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Podemos emplear (D.16) para escribir

$$d_i = n - \rho(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Ejemplo D.35 Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz $\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y hallamos su determinante:

$$\mathbf{B} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 2 & (\lambda - 5) \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{B}) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ serán las raíces de $\Delta(\mathbf{A})$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{1,2} = 3$$

La degeneracidad de $\lambda_{1,2} = 3$ se obtiene con (D.32):

$$d_1 = 2 - \rho(3\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$d_1 = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix}\right) = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1$$

Lo anterior significa que aunque λ tiene multiplicidad 2, sólo es posible encontrar un vector linealmente independiente. Este se obtiene empleando (D.23), y resulta ser

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en general} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

No es posible construir una base para el espacio de dimensión 2 con un solo vector, por lo tanto no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$.

Ejemplo D.36 Obtener los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ y diagonalizarla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Construimos $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda-3) & 0 & 1 \\ -1 & (\lambda-2) & 1 \\ 1 & 0 & (\lambda-3) \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico resulta ser

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2) - (\lambda-2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16$$

Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 4$. Para determinar la degeneracidad de λ_1 calculamos $\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (2-3) & 0 & 1 \\ -1 & (2-2) & 1 \\ 1 & 0 & (2-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = n - \rho(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad d_1 = 3 - 1 = 2$$

Lo anterior significa que existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Estos dos vectores junto con el vector propio asociado a $\lambda_3 = 4$ pueden formar una base y por tanto es posible diagonalizar $\mathbf{A}$. Para obtener los tres vectores propios empleamos (D.23):

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Se originan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3a - c = 2a \\ a + 2b - c = 2b \\ -a + 3c = 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3d - f = 4a \\ d + 2e - f = 4e \\ -d + 3f = 4f \end{cases}$$

Que se convierten en

$$a = c \qquad d = e = -f$$

Podemos construir dos vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ que satisfacen $a = c$ y un tercero $\mathbf{v}_3$ que satisface $d = e = -f$, por ejemplo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En la base $\{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\}$ la transformación $\mathbf{A}$ se representa por $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} == \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Definición D.33 Vectores propios generalizados
Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ y sea λ un valor propio de $\mathbf{A}$. $\mathbf{v}$ es un *vector propio generalizado de grado* k de $\mathbf{A}$ asociado a λ si y sólo si

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} &\neq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{D.33}$$

Nótese que para $k = 1$ la ecuación (D.33) se reduce a $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que coincide con la definición D.30 de vector propio.

Definición D.34 Cadena de vectores propios generalizados
Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector propio generalizado de orden k asociado a λ. Los vectores $\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-2}, \cdots, \mathbf{v}_1$ forman una *cadena de vectores propios generalizados* de longitud k si y sólo si

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{v}_k & = & \mathbf{v} & & \\ \mathbf{v}_{k-1} & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k-2} & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v} & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{k-1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{v}_1 & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} & = & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 \end{array} \tag{D.34}$$

Teorema D.21 Sea $\mathcal{N}_i$ el espacio nulo de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$. $\mathcal{N}_i$ es un subespacio de $\mathcal{N}_{i+1}$.

Demostración D.21 Sea $\mathbf{x}$ un vector en $\mathcal{N}_i$, por lo tanto $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x} = \mathbf{0}$; al multiplicar a cada lado por $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se tiene que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{i+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\mathbf{x}$ está en $\mathcal{N}_{i+1}$. Esto demuestra que $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_{i+1}$, y por lo tanto $\mathcal{N}_i$ es un subespacio de $\mathcal{N}_{i+1}$.

Teorema D.22 Sea $\mathcal{N}_i$ el espacio nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$. Sea $\mathbf{v}_i$ el $i-$ésimo vector de una cadena como las definidas en (D.34). El vector $\mathbf{v}_i$ está en $\mathcal{N}_i$ pero no en $\mathcal{N}_{i-1}$.

Demostración D.22 La demostración se obtiene calculando $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{v}_i$ y $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{i-1}\mathbf{v}_i$ y utilizando (D.34) y (D.33):

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i\mathbf{v}_i = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i-1}\mathbf{v}_i = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Los teoremas D.21 y D.22 se visualizan en la figura D.11. Cada subespacio nulo $\mathcal{N}_i$ está embebido dentro del subespacio nulo $\mathcal{N}_{i+1}$, y el vector $\mathbf{v}_i$ está justo en la diferencia entre $\mathcal{N}_i$ y $\mathcal{N}_{i-1}$.

Teorema D.23 Los vectores de una cadena de vectores propios generalizados como los de la definición D.34 son linealmente independientes.

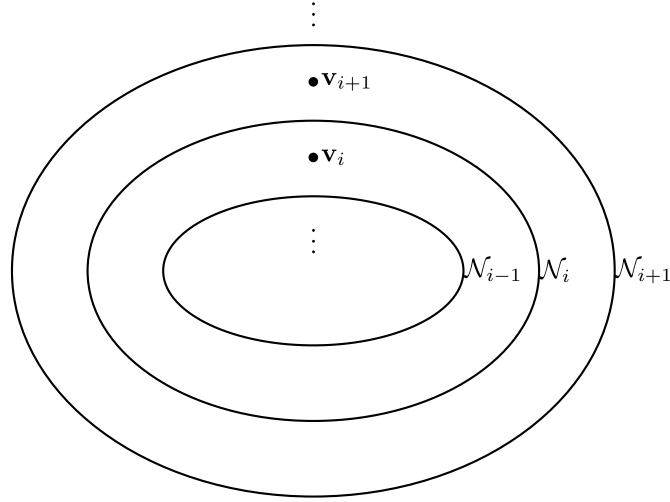


FIGURA D.11: Espacios Nulos de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ y cadenas de vectores propios generalizados

Demostración D.23 Dado que cada vector $\mathbf{v}_i$ pertenece a un subespacio diferente, según se muestra en la figura D.11, estos vectores no pueden ser linealmente dependientes.

Ejemplo D.37 Sea $\mathbf{A}$ la transformación 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

que tiene un valor propio repetido $\lambda = 3$ Para encontrar los espacios nulos $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ construimos las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^2$:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El espacio nulo $\mathcal{N}_1$ es el conjunto de los vectores $\mathbf{v}_1$ tales que $\mathbf{B}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, mientras que el espacio nulo $\mathcal{N}_2$ es el conjunto de los vectores $\mathbf{v}_2$ tales que $\mathbf{B}^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Claramente se ve que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

Es decir, el espacio nulo $\mathcal{N}_1$ es la recta de pendiente 1, mientras que el espacio nulo $\mathcal{N}_2$ corresponde a $\mathbb{R}^2$, tal como se muestra en la figura D.12.

Un vector propio generalizado de orden 2 debe estar en $\mathcal{N}_2$, pero no en $\mathcal{N}_1$, por ejemplo

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

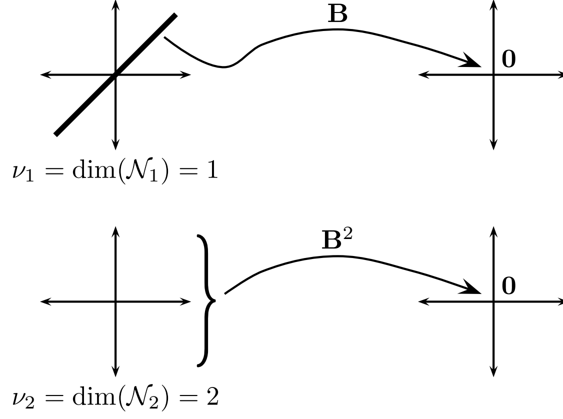


FIGURA D.12: Espacios nulos del ejemplo

Lo que origina una cadena de vectores generalizados

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_2 & = & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_1 & = & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 \end{array}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_1$$

Teorema D.24 Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $n \times n$ con un único valor propio repetido, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Sea $\mathbf{v}$ un vector propio generalizado de orden n asociado a λ. En esas condiciones, se cumple que $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ en donde $\mathbf{M}$ es la matriz modal formada por los vectores de la cadena de vectores propios generalizados creada por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{J}$ es una matriz $n \times n$ *casi-diagonal* que tiene a λ en la diagonal, 1 encima de la diagonal, y 0 en cualquier otro lugar. Es decir

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{(D.35)}$$

Demostración D.24 Demostrar (D.35) equivale a demostrar $\mathbf{MJ} = \mathbf{AM}$, por lo tanto calculamos por separado $\mathbf{MJ}$ y $\mathbf{AM}$ y comparamos los resultados:

$$\mathbf{MJ} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{MJ} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3) & \cdots & (\mathbf{v}_{n-1} + \lambda\mathbf{v}_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AM} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \mathbf{A}\mathbf{v}_3 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición D.34, el vector $\mathbf{v}_i$ de la cadena se calcula como $\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{i+1}$, por lo tanto

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \lambda\mathbf{v}_{i+1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

lo que significa que las columnas $2, 3, \cdots, n$ de $\mathbf{MJ}$ son iguales a las de $\mathbf{AM}$. Para demostrar que la primera columna también es igual, empleamos el teorema D.22, según el cual $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{N}_1$, es decir

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

y por lo tanto $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$, lo que concluye la demostración.

Ejemplo D.38 Sea $\mathbf{A}$ la transformación 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

que tiene un valor propio repetido $\lambda = 3$ y una cadena de vectores propios generalizados (ejemplo D.37):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado de calcular $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ es

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

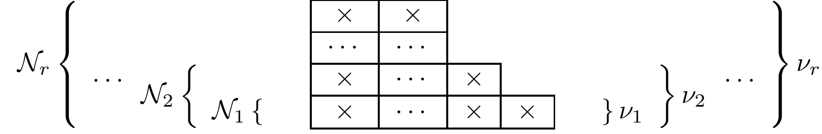


FIGURA D.13: Diagrama de Matthew vacío

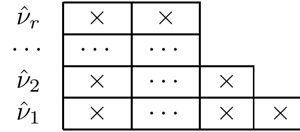


FIGURA D.14: Diagrama de Matthew vacío simple

D.5.3. Obtención de vectores propios generalizados

El teorema D.24 supone que la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ tiene un vector propio generalizado de orden n asociado al valor propio λ, a partir del cual se construye una única cadena de vectores. Esto no siempre sucede, por lo tanto, es necesario contar con un procedimiento para encontrar el conjunto de vectores propios asociados a λ.

Según el teorema D.21, $\mathcal{N}_i$ es un subespacio de $\mathcal{N}_{i+1}$, si denotamos por ν_i la dimensión de $\mathcal{N}_i$, lo anterior significa que $\nu_i < \nu_{i+1}$.

Este hecho permite construir el *diagrama de Matthew* (figura D.13) en el que se muestran las nulidades $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$ mediante casillas de un arreglo (ν_i será igual al número de casillas para $\mathcal{N}_i$ en el arreglo).

Debido a que $\mathcal{N}_i$ es el espacio nulo de $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i$, es posible calcular ν_i empleando (D.16) y de esa manera establecer la forma del diagrama de Matthew

$$\nu_i = n - \rho(\mathbf{B}^i)$$

Si definimos $\hat{\nu}_i = \nu_i - \nu_{i-1}$ el diagrama de Matthew tendrá la forma que se muestra en la figura D.14

Ejemplo D.39 Forma del arreglo

Cada casilla del diagrama de Matthew podría contener un vector de la base para un $\mathcal{N}_i$. Los vectores que sirven de base para $\mathcal{N}_i$ también pueden formar parte de la base de $\mathcal{N}_{i+1}$, ya que $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_{i+1}$.

Debido al teorema D.22, un vector $\mathbf{v}_i$ de una cadena de vectores puede formar parte de una base para $\mathcal{N}_i$ que no pueden formar parte de una base

$\hat{\nu}_r$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$			
$\hat{\nu}_{r-1}$	$\mathbf{B}\mathbf{v}_1$	$\mathbf{B}\mathbf{v}_2$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\hat{\nu}_2$	$\mathbf{B}^{r_1-2}\mathbf{v}_1$	$\mathbf{B}^{r_2-2}\mathbf{v}_2$	$\cdots$	$\mathbf{v}_{q-1}$	
$\hat{\nu}_1$	$\mathbf{B}^{r_1-1}\mathbf{v}_1$	$\mathbf{B}^{r_1-1}\mathbf{v}_2$	$\cdots$	$\mathbf{B}\mathbf{v}_{q-1}$	$\mathbf{v}_q$

FIGURA D.15: Diagrama de Matthew lleno

para $\mathcal{N}_{i-1}$. Esto permite diseñar una estrategia para buscar las bases de los $\mathcal{N}_i$ y así llenar el diagrama de Matthew. Para ello empleamos las siguientes convenciones.

1. Identificar el número de columnas del diagrama como q.
2. Identificar las columnas del diagrama como $c_1, c_2, \cdots, c_q$ de izquierda a derecha.
3. Identificar el tamaño de cada columna como $h_1, h_2, \cdots, h_q$.
4. Identificar cada celda por los subíndices i, j, con $j = 1, 2, \cdots, q$ e $i = 1, 2, \cdots, r_j$ de arriba a abajo.
5. Identificar el vector de la celda i, j por $\mathbf{x}_{i,j}$.

Para llenar el diagrama de Matthew deben buscarse q vectores propios generalizados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_q$ de orden $h_1, h_2, \cdots, h_q$ respectivamente. Cada uno de estos vectores estará ubicado en la primera celda de las columnas, es decir $\mathbf{x}_{i,1} = \mathbf{v}_i$. Cada columna se completa con la cadena de vectores propios generalizados, creada por el primer elemento de la columna. La forma que adopta el diagrama de Matthew se muestra en la figura D.15.

Ejemplo D.40 Sea $\mathbf{A}$ la matriz[4]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los valores propios de $\mathbf{A}$ hacemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1](\lambda-2)^2[(1-\lambda)^2-1] = (\lambda-2)^5\lambda = 0$$

[4] Adaptado de [5, pp.: 43]

Es decir, $\mathbf{A}$ tiene un valor propio 2 de multiplicidad 5 y un valor propio 0 de multiplicidad 1. Nos proponemos encontrar el diagrama de Matthew de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$.

Para ello definimos $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ y calculamos $\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3, \cdots$

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{I} \qquad \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^0 = 6 \qquad \nu_0 = 6 - 6 = 0$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 4 \\ \nu_1 = 6 - 4 = 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{B^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = 2 \\ \nu_2 = 6 - 2 = 4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{B^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = 1 \\ \nu_3 = 6 - 1 = 5 \end{matrix}$$

Puede comprobarse que $\nu_4 = \nu_3 = 5$ y por tanto no es necesario continuar. Con la información anterior podemos calcular $\hat{\nu}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_3 &= \nu_3 - \nu_2 = 5 - 4 = 1 \\ \hat{\nu}_2 &= \nu_2 - \nu_1 = 4 - 2 = 2 \\ \hat{\nu}_1 &= \nu_1 - \nu_0 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Con esta información podemos construir el diagrama de Matthew

$\mathbf{v}_1$	
$\mathbf{Bv}_1$	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{B}^2\mathbf{v}_1$	$\mathbf{Bv}_2$

De donde se deduce que $q = 2$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$.

El algoritmo para encontrar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_q$ es el siguiente:

1. $c = 1$.

2. $\mathbf{V}$ una matriz vacía.

3. $\mathbf{P}$ una matriz vacía.
4. Encontrar $\mathbf{N}_{h_c}$, una base para $\mathcal{N}_{h_c}$.
5. Construir $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{B}^{h_c-1}\mathbf{N}_{h_c}\end{bmatrix}$.
6. Emplear el algoritmo izquierda-a-derecha para extraer las columnas de $\mathbf{Q}$ linealmente independientes y adicionárselas a $\mathbf{P}$. Por cada columna que se extraiga de $\mathbf{Q}$ se extrae la columna correspondiente de $\mathbf{N}_{h_c}$ y se adiciona a la matriz $\mathbf{V}$.
7. Sea d la siguiente columna con $h_d < h_c$. Hacer $c = d$ y repetir desde 4 hasta terminar las columnas.
8. $\mathbf{V}$ es la matriz que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_q$.

Ejemplo D.41 Para obtener los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ del ejemplo D.40 identificamos $q = 2$, $h_1 = 3$, $h_2 = 2$, y empleamos el algoritmo siguiendo los siguientes pasos:

1. Para $c = 1$ se tiene que $h_c = 3$, por lo tanto buscamos $\mathbf{N}_3$ una base para $\mathcal{N}_3$, es decir buscamos los vectores $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{B}^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

2. Construimos $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}^2\mathbf{N}_3\end{bmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Al aplicar el algoritmo izquierda-a-derecha sólo se extrae la primera columna de $\mathbf{Q}$, por lo tanto las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{V}$ serán:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. La siguiente columna de altura menor a 3 es la columna 2, con $h_2 = 2$, por lo tanto buscamos $\mathbf{N}_2$ una base para $\mathcal{N}_2$, es decir buscamos los vectores $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{B}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Construimos $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{BN}_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -0.707 & -0.707 & 0 & -1 \\ 2 & -0.707 & -0.707 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Al aplicar el algoritmo izquierda-a-derecha sólo se extraen la primera y la cuarta columnas de $\mathbf{Q}$, por lo tanto las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{V}$ serán:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1.414 \\ 0 & -1.414 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.707 \\ 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

7. La matriz $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ contiene los dos vectores necesarios para construir el diagrama de Matthew, por lo tanto el conjunto completo de vectores propios generalizados de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1 = 2$ son los que aparecen en el diagrama de Matthew:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^2\mathbf{v}_1 & \mathbf{Bv}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{Bv}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

D.6. Forma canónica de Jordan

Sea $\mathbf{A}$ una transformación lineal $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ los valores propios diferentes de $\mathbf{A}$. Sea λ_j uno de esos valores propios, de multiplicidad

r_j cuyo diagrama de Matthew, tiene q_j columnas; la $i-$ésima columna tendrá altura h_{ij}; además los vectores propios generalizados asociados a λ_j obtenidos con este diagrama son $\mathbf{v}_{j1}, \mathbf{v}_{j2}, \cdots, \mathbf{v}_{jr_j}$.

En esas condiciones, es posible encontrar dos matrices **M** y **J** tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \tag{D.36}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{12} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{1q_1} \end{matrix} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \begin{matrix} \mathbf{J}_{m1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{mq_m} \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{D.37}$$

$$\mathbf{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}} \tag{D.38}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{12} & \cdots & \mathbf{v}_{1r_1} & \cdots & \mathbf{v}_{m1} & \mathbf{v}_{m2} & \cdots & \mathbf{v}_{mr_m} \end{bmatrix} \tag{D.39}$$

J es conocida como la *forma canónica de Jordan* de **A**. La ecuación D.37 muestra que la matriz **J** es *diagonal por bloques*, es decir, está formada por bloques organizados en la diagonal. Por fuera de estos bloques sólo hay ceros en la matriz. **M** es la *matriz modal*, y está formada por los vectores propios generalizados de **A**. La matriz modal no es única.

Los bloques $\mathbf{J}_{ji}$ que forman **J** tienen las siguientes propiedades:

- Cada valor propio diferente λ_j tendrá asociados uno o varios bloques $\mathbf{J}_{ji}$.
- El número de bloques asociados a λ_j será igual al número de columnas de su diagrama de matthew, q_j.
- Los bloques $\mathbf{J}_{ji}$ son cuadrados, y el tamaño del bloque (el número de filas o de columnas) es igual a la altura de la columna correspondiente en el diagrama de Matthew, h_{ij}.
- Cada bloque $\mathbf{J}_{ji}$ tiene en la diagonal al valor propio λ_j, tiene 1 por encima de la diagonal, y cero en las restantes casillas.

- Cada valor propio que no se repita tendrá asociado un único bloque de tamaño 1.
- En el caso sencillo en que ningún valor propio se repita $\mathbf{J}$ será una matriz diagonal que tendrá en la diagonal a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Ejemplo D.42 Para obtener la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$ del ejemplo D.40, se necesita construir la matriz modal $\mathbf{M}$ con todos los vectores propios generalizados. En el ejemplo D.41 se calcularon los vectores asociados a $\lambda_1 = 2$. En vector propio asociado a $\lambda_2 = 0$ será:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz modal será

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

La forma canónica de Jordan será

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que el valor propio $\lambda_1 = 2$ tiene dos bloques de Jordan asociados de tamaño 3 y 2 respectivamente, tal como se podría inferir de su diagrama de Matthew: el diagrama tiene dos columnas, la primera de altura 3 y la segunda de altura 2.

El valor propio $\lambda_2 = 0$ no se repite, y por tanto tiene un único bloque de Jordan asociado de tamaño 1.

D.7. Forma canónica real de Jordan

Dado que los valores propios de una matriz pueden ser complejos, en general las matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$ que aparecen en las ecuaciones (D.37), (D.38) y (D.39) serán complejas.

No obstante, cuando existen valores propios complejos es posible efectuar otro cambio de coordenadas diferente que produce también una matriz diagonal por bloques, pero real, conocida como la *forma canónica real de Jordan.*

D.7.1. Bloques de Jordan de tamaño 1

Supóngase que la matriz $\mathbf{A}$ tiene dos valores propios complejos conjugados $\lambda_i = a + jb$ y $\lambda_{i+1} = a - jb$, y que cada uno de estos valores tiene un bloque de Jordan de tamaño 1, asociado a los vectores propios generalizados $\mathbf{v}_k$ y $\mathbf{v}_{k+1}$, que también son complejos conjugados. Es decir, la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ es de la forma

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & a+jb & 0 & \\ & 0 & a-jb & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_{k+1} & \cdots \end{bmatrix}$$

La forma canónica real de Jordan reemplaza los dos bloques de tamaño 1 por uno de tamaño 2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Es decir, la forma canónica real de Jordan de $\mathbf{A}$ será

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & a & b & \\ & -b & a & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

La matriz modal real $\mathbf{M}_R$ se obtiene reemplazando en $\mathbf{M}$ los vectores complejos conjugados $\mathbf{v}_k$ y $\mathbf{v}_{k+1}$ por dos vectores reales con la parte real y la parte imaginaria de $\mathbf{v}$, es decir

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \cdots & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_k) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_k) & \cdots \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.43 Sea la matriz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} = -0.5 \pm j0.866$$

La forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ y la matriz modal que la producen son:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 + j0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0.408 & (-0.015 - j0.408) & (-0.015 + j0.408) \\ 0.816 & (0.721 + j0.382) & (0.721 - j0.382) \\ 0.408 & (0.346 - j0.217) & (0.346 + j0.217) \end{bmatrix}$$

Para obtener la forma canónica real de Jordan de $\mathbf{A}$ construimos la matriz real $\mathbf{M}_R$, y verificamos.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} -0.408 & -0.015 & -0.408 \\ 0.816 & 0.721 & 0.382 \\ 0.408 & 0.346 & -0.217 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & -0.866 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Otra alternativa

Dado un bloque

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a + jb & 0 \\ 0 & a - jb \end{bmatrix}$$

existe una matriz $\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$ es real, con la forma canónica real de Jordan:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} (1-j) & (1+j) \\ (1+j) & (1-j) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Una interpretación

Un bloque real de jordan $\mathbf{J}_r$ asociado a un valor propio $a + jb$ puede reescribirse de la siguente forma:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = a\mathbf{I} + b\mathbf{L}$$

En donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, y $\mathbf{L}$ es una matriz que cumple un papel similar a $j = \sqrt{(-1)}$, ya que

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$$

De esta manera, un bloque real de Jordan puede interpretarse como un número complejo matricial.

D.7.2. Bloques de Jordan de tamaño mayor que 1

Dado un bloque

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} a+jb & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+jb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-jb & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-jb \end{bmatrix}$$

Su forma canónica real de Jordan es

$$\mathbf{J}_{Ri} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

En la diagonal está la nueva presentación de los e-valores, como bloques reales de Jordan y sobre la diagonal está la matriz identidad. Para obtener este matriz puede procederse de forma similar a como se hace con los bloques de tamaño 1, es decir, reemplazar los vectores propios complejos conjugados por vectores con las partes real e imaginaria de éstos.

En general $\mathbf{J}_{Ri}$ será de la forma:

$$\begin{bmatrix} (a\mathbf{I}+b\mathbf{L}) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (a\mathbf{I}+b\mathbf{L}) & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & (a\mathbf{I}+b\mathbf{L}) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & (a\mathbf{I}+b\mathbf{L}) \end{bmatrix} \tag{D.40}$$

D.8. Funciones de matrices cuadradas

Sea $f(\sigma)$ una función que opera sobre un escalar, y sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $n \times n$. En esta sección se aborda el problema de cómo calcular $f(\mathbf{A})$, es decir, cómo extender $f(\sigma)$ de los escalares a las matrices.

D.8.1. Polinomios de matrices

Si $f(\sigma)$ es un polinomio, la extensión a las matrices se fundamenta en la definición

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k \text{ veces}} \qquad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \tag{D.41}$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene una representación canónica de Jordan $\mathbf{J}$ obtenida con la matriz modal $\mathbf{M}$, es decir, si $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ entonces

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})\cdots(\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1})}_{k \text{ veces}} = \mathbf{M}\underbrace{(\mathbf{J}\cdots\mathbf{J})}_{k \text{ veces}}\mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1} \tag{D.42}$$

Como $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, el cálculo de $\mathbf{J}^k$ puede efectuarse como sigue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2^k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_n^k \end{bmatrix}$$

Empleando la definición (D.41), un polinomio genérico

$$f(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \cdots + a_n\sigma^n$$

puede calcularse en $\mathbf{A}$ como

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_n\mathbf{A}^n$$

o en función de las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{J}$:

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} + a_1\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} + a_2\mathbf{M}\mathbf{J}^2\mathbf{M}^{-1} + \cdots + a_n\mathbf{M}\mathbf{J}^n\mathbf{M}$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\mathbf{J})\mathbf{M}^{-1} \tag{D.43}$$

Ejemplo D.44 Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.45 Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

calculamos los primeros términos $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, $\mathbf{A}^5$ y $\mathbf{A}^6$:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} -b^6 & 0 \\ 0 & -b^6 \end{bmatrix}$$

Observando la secuencia se puede inferir que

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} (-1)^{\frac{k}{2}}b^k & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{k}{2}}b^k \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es par} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\frac{k-1}{2}}b^k \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}}b^k & 0 \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo D.46 Calcular $\mathbf{A}^k$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques de Jordan; para ilustrar este caso supongamos una matriz de tamaño 5×5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos los primeros términos $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 & 5\lambda \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^5 \end{bmatrix} \mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 & 20\lambda^3 & 15\lambda^2 \\ 0 & \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 & 20\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^6 & 6\lambda^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^6 \end{bmatrix}$$

Puede verse que $\mathbf{A}^k$ es una matriz triangular superior, en la que los elementos de la fila i son los mismos elementos de la fila $i+1$ pero están desplazados una casilla a la derecha.

Los términos de la diagonal son λ^k. Denotemos por a_j un elemento que esté desplazado j casillas de la diagonal en cualquier fila; a_j será

$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^{k-j} & \text{si } j \geq k \end{cases} \qquad a_j = \binom{k}{j}\lambda^{k-j}$$

Este resultado se puede generalizar para una matriz $n \times n$ con la forma de los bloques de Jordan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \frac{k!}{1!(k-1)!}\lambda^{k-1} & \frac{k!}{2!(k-2)!}\lambda^{k-2} & \cdots & \frac{k!}{(n-1)!(k-n+1)!}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & \frac{k!}{1!(k-1)!}\lambda^{k-1} & \cdots & \frac{k!}{(n-2)!(k-n+2)!}\lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k & \frac{k!}{1!(k-1)!}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix} \quad \text{(D.44)}$$

En caso de que un exponente $k - j$ sea negativo, el término correspondiente en D.44 será 0

D.8.2. Funciones como series de potencias

Es posible extender una función $f(\sigma)$ de los escalares a las matrices empleando la representación de $f(\sigma)$ en series de Taylor expandidas alrededor de 0 (series de MacLaurin):

$$f(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!} \left. \frac{d^k f(\sigma)}{d\sigma^k} \right|_{\sigma} \quad \text{(D.45)}$$

Empleando (D.45) se puede expresar $f(\sigma)$ como un polinomio de σ. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, puede calcularse $f(\mathbf{a})$ empleando ese polinomio.

Las siguientes son las expansiones de algunas funciones comunes:

$$e^{\sigma t} = 1 + \frac{\sigma t}{1!} + \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^3 t^k}{3!} + \frac{\sigma^4 t^k}{4!} + \cdots \quad \text{(D.46)}$$

$$\cos \sigma t = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^4 t^4}{4!} - \frac{\sigma^6 t^6}{6!} + \frac{\sigma^8 t^8}{8!} + \cdots \quad \text{(D.47)}$$

$$\sin \sigma t = \frac{\sigma t}{1!} - \frac{\sigma^3 t^3}{3!} + \frac{\sigma^5 t^5}{5!} - \frac{\sigma^7 t^7}{7!} + \cdots \quad \text{(D.48)}$$

Ejemplo D.47 Sea $\mathbf{A}$ una matriz diagonal como la del ejemplo D.44. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ podemos emplear (D.46)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^k}{4!} + \cdots$$

que de acuerdo con los resultados del ejemplo D.44 se calculará así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1+\frac{\lambda_1 t}{1!}+\frac{\lambda_1^2 t^2}{2!}+\cdots) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1+\frac{\lambda_2 t}{1!}+\frac{\lambda_2^2 t^2}{2!}+\cdots) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1+\frac{\lambda_1 t}{1!}+\cdots) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la diagonal corresponde a la expansión en series de Taylor de una exponencial como las de (D.46), por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ será:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.48 Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan para el caso en que los valores propios son imaginarios puros, como la del ejemplo D.45. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ podemos emplear (D.46)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^k}{4!} + \cdots$$

que de acuerdo con los resultados del ejemplo D.45 se calculará así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1-\frac{t^2 b^2}{2!}+\frac{t^4 b^4}{2!}+\cdots) & (\frac{tb}{1!}-\frac{t^3 b^3}{3!}+\frac{t^5 b^5}{5!}+\cdots) \\ (-\frac{tb}{1!}+\frac{t^3 b^3}{3!}-\frac{t^5 b^5}{5!}+\cdots) & (1-\frac{t^2 b^2}{2!}+\frac{t^4 b^4}{2!}+\cdots) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la matriz corresponde a la expansión de Taylor de una sinusoide como las de (D.47) y (D.48), por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse como

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.49 Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques de Jordan como la del ejemplo D.46. Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ podemos emplear (D.46)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^k}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^k}{4!} + \cdots$$

que de acuerdo con los resultados del ejemplo D.46 se calculará así:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} + \frac{t}{2!}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \frac{1}{2!}\lambda & 1 & \cdots \\ 0 & \lambda^k & \frac{1!}{2!}\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^k}{1!(k-1)!} & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} t^k}{2!(k-2)!} & \cdots \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^k}{1!(k-1)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{t}{1!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^2}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} t^{k-2}}{(k-2)!} & \cdots \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{t}{1!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Efectuando el cambio de variable $m = k - j$ se tiene

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{t}{1!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m t^m}{(m)!} & \frac{t^2}{2!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m t^m}{(m)!} & \cdots \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{t}{1!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m t^m}{(m)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Cada una de las sumatorias corresponde a la expansión de Taylor de una exponencial como la de (D.46), por lo tanto

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & \cdots \\ 0 & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \tag{D.49}$$

Ejemplo D.50 Sea $\mathbf{A}$ una matriz con la forma de los bloques reales de Jordan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ escribimos $\mathbf{A}$ como la suma de dos matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

De tal manera que $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{B}t} e^{\mathbf{C}t}$. Empleando los resultados de los ejemplos D.47 y D.48 se tiene que

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}$$

D.8.3. Definición de funciones mediante polinomios

Definición D.35 Polinomio mínimo de una matriz
Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. El *polinomio mínimo* de $\mathbf{A}$ es el polinomio mónico $\psi(\sigma)$ de menor orden tal que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

Teorema D.25 El polinomio mínimo de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es el mismo polinomio mínimo de su representación canónica de Jordan $\mathbf{J}$.

Demostración D.25 En virtud de (D.43), es claro que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\psi(\mathbf{J}) = \mathbf{0}$.

Definición D.36 Índice de una matriz
Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada, cuya forma canónica de Jordan es $\mathbf{J}$, de la forma de (D.37). Cada valor propio λ_j es de multiplicidad r_j y tiene asociados q_j bloques de Jordan de la forma de (D.38). Cada bloque es de tamaño h_{ij}. Se define el *índice* del valor propio λ_j, denotado por $\bar{n}_j$ como el tamaño más grande de los bloques de Jordan $\mathbf{J}_{ji}$ asociados al valor propio λ_j. Claramente $\bar{n}_j \leq r_j$ y $\bar{n}_j = \text{máx}_i\{h_{ij}\}$.

Teorema D.26 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ con índices $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \cdots, \bar{n}_m$ respectivamente. El polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ es

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j} \tag{D.50}$$

Demostración D.26 De acuerdo con el teorema D.25, basta con demostrar que (D.50) es el polinomio mínimo de $\mathbf{J}$, la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$.

Consideremos primero la matriz $\mathbf{J}_j$ con los bloques de Jordan asociados al valor propio λ_j:

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{j1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{j2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{jq_j} \end{bmatrix}$$

El polinomio mínimo de $\mathbf{J}_j$ es $\psi_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j}$ como puede comprobarse al calcular $(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_{ij}}$:

$$(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}$$

$$(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}$$

$$(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_{ij}-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}$$

$$(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_{ij}-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{h_{ij} \times h_{ij}}$$

$$(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^{h_{ij}} = \mathbf{0}$$

De acuerdo con la definición D.36 $\bar{n}_j$ es el tamaño del bloque de Jordan asociado a λ_j más grande, es claro que $(\mathbf{J}_{ji} - \lambda_j \mathbf{I})^{\bar{n}_j} = \mathbf{0}$ para todos los bloques de Jordan asociados a λ_j. Como $\mathbf{J}_j$ es diagonal por bloques, y sus bloques son $\mathbf{J}_{ji}$ se desprende que $(\mathbf{J}_j - \lambda_j \mathbf{I})^{\bar{n}_j} = \mathbf{0}$ es decir, que el polinomio mínimo de $\mathbf{J}_j$ es $(\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j}$.

Siguiendo un argumento similar, como $\mathbf{J}$ es diagonal por bloques, y sus bloques son $\mathbf{J}_j$, se tiene que el polinomio mínimo de $\mathbf{J}$ es

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=j}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j}$$

Ejemplo D.51 Las matrices,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

que están en la forma canónica de Jordan, tienen todas el mismo polinomio característico $\Delta(\lambda) = (\lambda - a)^3(\lambda - b)$. Sin embargo, el polinomio mínimo de cada una de ellas es diferente, debido a que el índice de a es diferente:

- para $\mathbf{A}_1$ es $\psi_1(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$.

- para $\mathbf{A}_2$ es $\psi_2(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$.
- para $\mathbf{A}_3$ es $\psi_3(\lambda) = (\lambda - a)^3(\lambda - b)$.

Teorema D.27 (Teorema de Caley-Hamilton) Si $\Delta(\sigma)$ es el polinomio característico de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, entonces $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

Demostración D.27 El polinomio mímino de $\mathbf{A}$ es

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=j}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j}$$

Mientras que el polinomio característico es

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=j}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$$

Como $\bar{n}_j \leq n_j$, y como $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, queda demostrado que $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

Definición D.37 Valores de una función en el espectro de una matriz
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ con índices $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \cdots, \bar{n}_m$ respectivamente. Sea ψ el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ y sea f un polinomio cualquiera. El conjunto de *valores de f en el espectro de $\mathbf{A}$* son los valores: $f^{(l)}(\lambda_i)$ para $l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{n}_i - 1$; $i = 1, 2, \cdots, m$ en donde $f^{(l)}(\lambda_i) = \left. \frac{d^l f(\sigma)}{d\sigma^l} \right|_{\sigma=\lambda_i}$ y en total son $n = \sum_{i=1}^{m} \bar{n}_i$ valores.

Teorema D.28 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ con índices $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \cdots, \bar{n}_m$ respectivamente. Sea ψ el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ y sean f y g dos polinomios cualesquiera. En esas condiciones cualquiera de las siguientes afirmaciones es equivalente

1. $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$.
2. Una de dos condiciones se cumple: o bien $f = h_1\psi + g$ ó $g = h_2\psi + f$ para algunos polinomios h_1, h_2.
3. Los valores de f y de g en el espectro de $\mathbf{A}$ son iguales $f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i)$ para $l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{n}_i - 1$; $i = 1, 2, \cdots, m$.

Demostración D.28 Dado que $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ es evidente la equivalencia de las afirmaciones 1 y 2. Para demostrar la equivalencia entre 2 y 3 basta recordar que $\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{\bar{n}_j}$ y calcular las derivadas $f^{(l)}(\lambda_i)$ y $g^{(l)}(\lambda_i)$.

Definición D.38 Funciones de matrices cuadradas
Sea $f(\lambda)$ una función, no necesariamente un polinomio, definida en el espectro de $\mathbf{A}$. Si $g(\lambda)$ es un polinomio que tiene los mismos valores en el espectro de $\mathbf{A}$ entonces se define $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$.

La definición D.38 brinda una posibilidad para extender a las matrices cuadradas una función $f(\lambda)$ definida para escalares. Es decir, permite calcular $f(\mathbf{A})$ buscando un polinomio adecuado g y calculando $g(\mathbf{A})$. El procedimiento completo puede resumirse así:

Sea $f(\lambda)$ una función, y sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$. Para calcular $f(\mathbf{A})$ deben seguirse los siguientes pasos:

1. Obtener el polinomio característico de $\mathbf{A}$

$$\Delta\lambda = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

2. Definir el polinomio $g(\lambda)$

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}$$

   en donde $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ son desconocidas. Cualquier otro polinomio de orden $n-1$ es igualmente válido.

3. Plantear n ecuaciones igualando los valores de f y g en el espectro de $\mathbf{A}$:

$$f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i) \text{ para } l = 0, 1, 2, \cdots, \bar{n}_i - 1; i = 1, 2, \cdots, m$$

4. Obtener $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ a partir de las n ecuaciones del punto anterior.

5. Calcular $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots, +\alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$.

Ejemplo D.52 Calcular $\mathbf{A}^{50}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El problema puede plantearse también de la siguiente forma: dada $f(\lambda) = \lambda^{50}$ calcular $f(\mathbf{A})$. Empleamos el procedimiento propuesto:

1. El polinomio característico de $\mathbf{A}$ es

$$\Delta\lambda = (\lambda - 1)^2$$

2. Definimos el polinomio

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda$$

3. Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(1) = 1^{50} = 1 & g^{(0)}(1) = \alpha_0 + 1\alpha_1 \\ f^{(1)}(1) = 50 \cdot 1^{49} = 50 & g^{(1)}(1) = \alpha_1 \\ f^{(0)}(1) = g^{(0)}(1) & \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ f^{(1)}(1) = g^{(1)}(1) & \alpha_1 = 50 \end{array}$$

4. obtenemos α_0 y α_1:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -49 \\ \alpha_1 = 50 \end{cases}$$

5. Calculamos $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) = -49 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 50 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 150 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo D.53 Calcular $f(\mathbf{A})$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques de Jordan. Para ilustrar suponemos una matriz de orden 4×4

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Empleamos el procedimiento propuesto:

1. El polinomio característico es

$$\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$$

2. Definimos un polinomio de orden 3

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1(\lambda - \lambda_1) + \alpha_2(\lambda - \lambda_1)^2 + \alpha_3(\lambda - \lambda_1)^3$$

3. Obtenemos 4 ecuaciones

$$\begin{array}{c} f(\lambda_1) = g(\lambda_1) = \alpha_0 \\ f^{(1)}(\lambda_1) = g^{(1)}(\lambda_1) = 1!\alpha_1 \\ f^{(2)}(\lambda_1) = g^{(2)}(\lambda_1) = 2!\alpha_2 \\ f^{(3)}(\lambda_1) = g^{(3)}(\lambda_1) = 3!\alpha_3 \end{array}$$

4. Obtenemos los valores de α_i:

$$\begin{cases} \alpha_0 = f(\lambda_1) \\ \alpha_1 = f^{(1)}(\lambda_1)/1! \\ \alpha_2 = f^{(2)}(\lambda_1)/2! \\ \alpha_3 = f^{(3)}(\lambda_1)/3! \end{cases}$$

5. Calculamos $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) + \frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 + \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3$$

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} + \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} +$$

$$\frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}f(\lambda_1) & \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!} & \frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!} & \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}\\ 0 & f(\lambda_1) & \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!} & \frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!}\\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!}\\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1)\end{bmatrix}$$

Siguiendo un procedimiento similar puede obtenerse $f(\mathbf{A})$ cuando $\mathbf{A}$ es una matrix $n \times n$ con la forma de los bloques de Jordan

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}f(\lambda_1) & \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!} & \frac{f^{(2)}(\lambda_1)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\lambda_1) & \frac{f^{(1)}(\lambda_1)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_1)}{(n-2)!}\\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda_1)}{(n-3)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_1)\end{bmatrix} \tag{D.51}$$

Ejemplo D.54 Calcular $f(\mathbf{A})$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques de Jordan y $f(\lambda) = e^{\lambda t}$.

Empleando (D.51) se obtiene directamente $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots\\ 0 & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{bmatrix} \tag{D.52}$$

Nótese que las derivadas en (D.51) son respecto a λ. Vale la pena comparar los resultados (D.49) y (D.52).

Ejemplo D.55 Calcular $f(\mathbf{A})$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz con la forma de los bloques de Jordan y $f(\lambda) = (s-\lambda)^{-1}$.

Empleando (D.51) se obtiene directamente $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^3} & \cdots\\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \cdots\\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{bmatrix} \tag{D.53}$$

Bibliografía

[1] Fabiola Angulo. *Análisis de Sistemas de Control No Lineales*. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 1999.

[2] Antsaklis y Michel. *Linear Systems*. Mc GrawHill.

[3] Karl J. Astrom y Bjorn Wittenmark. *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Prentice Hall, 1997.

[4] Thomas J. Cavicchi. *Digital Signal Processing*. John Wiley and Sons, 2000.

[5] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford Press.

[6] Chi-Tsong Chen. *Analog and Digital Control System Design*. Saunders College Pubkishing, 1993.

[7] John J. D'azzo y Constantine Houpis. *Linear Control Systems Analysis and Design*. Mc GrawHill, 1988.

[8] Eronini, Umez, y Eronini. *Dinámica de Sistemas y Control*. Thomson Learning, 2001.

[9] CloseÑ. Frederick. *The Control Handbook*, chapter Graphical Modeles, pages 85–98. CRC Press and IEEE Press, 1996.

[10] John Guckemheimer y Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, 1983.

[11] G.H. Hostetter, C.J. Savant, y R.T. Stefani. *Sistemas de Control*. Interamericana, 1987.

[12] Benjamin Kuo. *Digital Control Systems*. Oxford press, 1992.

[13] Benjamin Kuo. *Sistemas Automáticos de Control*. Mc. GrawHill, 1995.

[14] William S. Levine. *The Control Handbook*. CRC Press and IEEE Press, 1996.

[15] Douglas K. Lindner. *Introducción a las señales y los sistemas*. Mc. Graw Hill, 2002.

[16] Lennart Ljung. *System Identification*. Prentice Hall.

[17] William L. Luyben, Bjorn D. Tyreus, y Michel L. Luyben. *Plantwide Process Control*. Mc Graw Hill, 1999.

[18] Adolfo Mora. *Tecnología del Control de Procesos Industriales*. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Colombia, 1987.

[19] Babatunde A. Ogunnaike y W. Harmon Ray. *Process Dynamics, Modeling, and Control*. Oxford Press, 1994.

[20] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, y Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 1996.

[21] Alexander D. Poularikas. *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press and IEEE Press, 2000.

[22] M..V.C Rao y A.K. Subramanian. Elimination of singular cases in jury's test. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(Feb. 1976):114–115.

[23] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1993.

Índice analítico